СТОПАНСКА АКАДЕМИЯ

„Димитър А. Ценов" - Свищов

KreativEU
Knowledge & Creativity European University

Международна научно-практическа конференция

90 години дарителство, знание, иновации и устойчиво развитие в СА „Д. А. Ценов" – Свищов

Том I



5-7 ноември 2026 г.

СТОПАНСКА АКАДЕМИЯ „Д. А. ЦЕНОВ“ – СВИЩОВ

МЕЖДУНАРОДНА НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКА КОНФЕРЕНЦИЯ

90 ГОДИНИ ДАРИТЕЛСТВО, ЗНАНИЕ, ИНОВАЦИИ И УСТОЙЧИВО РАЗВИТИЕ В СА „Д. А. ЦЕНОВ“ – СВИЩОВ

Свищов, 5-7 ноември 2026 г.

Посветена на 90 години от създаването на Стопанска академия „Димитър А. Ценов“

Сборник с доклади

ТОМ I

Международната научно-практическа конференция е организирана при изпълнение на Административен договор № КП-06-МНФ/23 от 18.08.2026 г. (BNSF-1.010-0023-C01) на Фонд „Научни изследвания“ при МОН по Процедура за подкрепа на международни научни форуми, провеждани в Република България

Академично издателство „Ценов“
Свищов
2026

ПРОГРАМЕН КОМИТЕТ
Доц. д-р Марин Маринов
Ректор на Стопанска академия „Димитър А. Ценов“ – председател
Проф. д-р Красимир Шишманов
Проф. д. н. Божидар Божинов
Проф. д-р Любчо Варамезов
Доц. д-р Маргарита Шопова
Доц. д-р Ваня Григорова
Доц. д-р Румен Ерусалимов
Доц. д-р Пламен Йорданов
Доц. д-р Драгомир Илиев
Доц. д-р Иван Марчевски
Доц. д-р Ирена Емилова
Доц. д-р Сергей Найденов
Доц. д-р Катя Личева
Проф. д-р Пенка Шишманова
Доц. д-р Елена Йорданова
Доц. д-р Пламен Петков
Доц. д-р Пепа Стойкова
Доц. д-р Михаил Чиприянов
Доц. д-р Любка Илиева
Доц. д-р Теодора Филипова
Ст. преп. Елка Узунова
Ст. преп. д-р Радослав Николов

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ
Доц. д-р Здравко Любенов – *председател*
Проф. д-р Светослав Илийчовски
Проф. д-р Атанас Атанасов
Доц. д-р Галина Чиприянова
Доц. д-р Маруся Смокова-Стефанова
Доц. д-р Красимира Славева
Гл. ас. д-р Асен Божиков
Ст. преп. д-р Венцислав Диков

РЕДАКЦИОНЕН СЪВЕТ
Проф. д-р Атанас Атанасов – *председател*
Проф. д-р Светослав Илийчовски
Проф. д-р Красимир Шишманов
Доц. д-р Искра Пантелеева
Доц. д-р Танер Исмаилов
Доц. д-р Здравко Любенов
Доц. д-р Галя Иванова-Кузманова
Доц. д-р Ирена Емилова
Доц. д-р Христо Сирашки
Доц. д-р Елена Йорданова
Доц. д-р Любка Илиева
Доц. д-р Валентин Милинов
Доц. д-р Красимира Славева
Доц. д-р Маруся Смокова-Стефанова
Доц. д-р Венцислав Василев
Доц. д-р Зорница Петкова

Публикуваните материали са рецензирани по метода на двойно сляпо рецензиране. Авторите носят отговорност за съдържанието на материалите, изразените мнения, използваните данни, цитираните източници и езиковото оформление на текстовете. Фонд „Научни изследвания“ не носи отговорност за съдържанието на докладите, представени на научния форум, както и за съдържанието на рекламните и други материали за него.

ISBN 978-954-23-2686-1 (print)
ISBN 978-954-23-2687-8 (online)

D. A. TSENOV ACADEMY OF ECONOMICS – SVISHTOV

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE

90 YEARS OF CHARITY, KNOWLEDGE, INNOVATION AND SUSTAINABLE DEVELOPMENT IN D. A. TSENOV ACADEMY OF ECONOMICS - SVISHTOV

Svishtov, 5th - 7th November 2026

Dedicated to the 90th anniversary since the establishment of D. A. Tsenov Academy of Economics

Conference Proceedings

VOLUME I

The International Scientific and Practical Conference was organized in the implementation of Administrative Contract № КП-06-МНФ/23 of August 18, 2026 (BNSF-1.010-0023-C01), awarded by the Bulgarian National Science Fund at the Ministry of Education and Science under the Procedure for Support of International Scientific Forums Held in the Republic of Bulgaria

Tsenov Academic Publishing House
Svishtov
2026

PROGRAM COMMITTEE
Assoc. Prof. Marin Marinov, PhD
Rector of D. A. Tsenov Academy of Economics
Prof. Krasimir Shishmanov, PhD
Prof. Bozhidar Bozhinov, PhD
Prof. Lyubcho Varamezov, PhD
Assoc. Prof. Margarita Shopova, PhD
Assoc. Prof. Vanya Grigorova, PhD
Assoc. Prof. Rumen Jerusalemov, PhD
Assoc. Prof. Plamen Yordanov, PhD
Assoc. Prof. Dragomir Iliev, PhD
Assoc. Prof. Ivan Marchevski, PhD
Assoc. Prof. Irena Emilova, PhD
Assoc. Prof. Sergey Naydenov, PhD
Assoc. Prof. Katya Licheva, PhD
Prof. Penka Shishmanova, PhD
Assoc. Prof. Elena Yordanova, PhD
Assoc. Prof. Plamen Petkov, PhD
Assoc. Prof. Pepa Stoykova, PhD
Assoc. Prof. Mihail Chipriyanov, PhD
Assoc. Prof. Lyubka Ilieva, PhD
Assoc. Prof. Teodora Filipova, PhD
Senior Lecturer Elka Uzunova
Senior Lecturer Radoslav Nikolov, PhD

ORGANIZING COMMITTEE
Assoc. Prof. Zdravko Lyubenov. PhD, Chairman
Prof. Svetoslav Iliychovski, PhD
Prof. Atanas Atanasov, PhD
Assoc. Prof. Galina Chipriyanova, PhD
Assoc. Prof. Marusya Smokova-Stefanova, PhD
Assoc. Prof. Krasimira Slaveva, PhD
Ch. Assist. Prof. Asen Bozhikov, PhD
Sen. Lect. Ventsislav Dikov

EDITORIAL BOARD
Prof. Atanas Atanasov, PhD – Chair
Prof. Svetoslav Iliychovski, PhD
Assoc. Prof. Iskra Panteleeva, PhD
Prof. Krasimir Shishmanov, PhD
Assoc. Prof. Taner Ismailov, PhD
Assoc. Prof. Zdravko Lyubenov, PhD
Assoc. Prof. Galya Ivanova-Kuzmanova, PhD
Assoc. Prof. Irena Emilova, PhD
Assoc. Prof. Hristo Sirashki, PhD
Assoc. Prof. Elena Yordanova, PhD
Assoc. Prof. Lyubka Ilieva, PhD
Assoc. Prof. Valentin Milinov, PhD
Assoc. Prof. Krasimira Slaveva, PhD
Assoc. Prof. Marusya Smokova-Stefanova, PhD
Assoc. Prof. Ventsislav Vasilev, PhD
Assoc. Prof. Zornitsa Petkova, PhD

The published materials have been peer-reviewed using the double-blind review method. The authors are solely responsible for the content of the materials, the opinions expressed, the data used, the cited sources, and the linguistic formatting of the texts. The Bulgarian National Science Fund bears no responsibility for the content of the papers presented at the scientific forum, nor for the content of its promotional or other materials.

ISBN 978-954-23-2686-1 (print)
ISBN 978-954-23-2687-8 (online)

СЪДЪРЖАНИЕ

ТОМ I
ПЛЕНАРНИ ДОКЛАДИ

ЗНАНИЕ, ИНОВАЦИИ И УСТОЙЧИВО РАЗВИТИЕ В СЪВРЕМЕННОТО ВИСШЕ ОБРАЗОВАНИЕ – ПРОБЛЕМИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА
Проф. д.н Божидар Божинов 9

PREPARING FUTURE PROFESSIONALS IN BUSINESS SCIENCES FOR THE AI ERA: COMPETENCIES AND CURRICULAR CHALLENGES
Prof., Célio Gonçalo Cardoso Marques, PhD, Senior Technician, MSc, Ana Catarina Gomes Almeida 27

INVESTIGATING GRANGER CAUSALITY BETWEEN GDP-RELATED INDICATORS: EVIDENCE FROM BULGARIA AND ROMANIA
Professor, Alexandru-Lucian Manole, PhD., Professor, Cristian-Marian Barbu, PhD. 43

ФИНАНСИ, ИКОНОМИКС, ЗАСТРАХОВАНЕ И ОСИГУРЯВАНЕ

АНАЛИЗ НА ЦЕНОВИЯ ТРЕНД НА БЪЛГАРСКИТЕ БОРСОВО ТЪРГУВАНИ ТУРИСТИЧЕСКИ ДРУЖЕСТВА, СЛЕД COVID И ПРИ ВОЙНАТА В УКРАЙНА
Проф. д-р Стефан Симеонов, Алексей Гудев, докторант 57

LEASING AS STRATEGIC FINANCING TOOL
Prof. Tatjana Spaseska, PhD, Emilija Gjorgjioska, Aneta Risteska-Jankuloska 64

ФИНАНСОВАТА ГРАМОТНОСТ КАТО ФАКТОР ЗА ПРЕОДОЛЯВАНЕ НА ЕНЕРГИЙНАТА БЕДНОСТ И ПРЕХОДА КЪМ НИСКОВЪГЛЕРОДНО ОТОПЛЕНИЕ
Доц. д-р Александрина Александрова 73

РАЗВИТИЕ И ДИФЕРЕНЦИАЦИЯ НА ЗАСТРАХОВАТЕЛНИТЕ ПАЗАРИ НА БАЛКАНИТЕ: СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ ЗА ПЕРИОДА 2015–2024 Г.
Доц. д-р Венцислав Василев 80

ФИНАНСОВ КОНТРОЛИНГ И БИЗНЕС ОРГАНИЗАЦИИТЕ
Доц. д-р Людмил Кръстев 88

ИКОНОМИЧЕСКА ПРИРОДА НА РАЗХОДИТЕ ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ
Доц. д-р Марин Маринов 93

ГЛОБАЛИЗАЦИЯТА И НЕЙНОТО ВЛИЯНИЕ ВЪРХУ МЕЖДУНАРОДНИТЕ ФИНАНСИ И ИНВЕСТИЦИИТЕ
Доц. д-р Наталия Силичева 102

ПЕРСПЕКТИВИ ПРЕД СИСТЕМАТА ЗА СОЦИАЛНО ПОДПОМАГАНЕ В БЪЛГАРИЯ
Доц. д-р Николай Нинов 109

ТЕНДЕНЦИИ В ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТТА НА ОСИГУРИТЕЛНИЯ СТАЖ ПРИ МАТЕРИАЛИЗИРАНЕ ПРАВОТО НА ПЕНСИЯ ЗА ОСИГУРИТЕЛЕН СТАЖ И ВЪЗРАСТ В БЪЛГАРИЯ
Доц. д-р Пламен Йорданов, гл. ас. д-р Маргарита Николова 120

ПОЛОВО-ВЪЗРАСТОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ПУБЛИЧНОТО ПЕНСИОННО ОСИГУРЯВАНЕ ПРИ СТАРОСТ В БЪЛГАРИЯ
Доц. д-р Пламен Йорданов, гл. ас. д-р Маргарита Николова 129

ВЛИЯНИЕ НА ОСНОВНИТЕ ФАКТОРИ ВЪРХУ РЕАЛИЗИРАНИЯ ПРЕМИЕН ПРИХОД ПРИ ЗАСТРАХОВАНЕТО НА СГРАДИ И ДОМАШНО ИМУЩЕСТВО
Доц. д-р Румен Ерусалимов 139

БОНУС-МАЛУС СИСТЕМАТА ПРИ ЗАСТРАХОВКАТА „ГРАЖДАНСКА ОТГОВОРНОСТ НА АВТОМОБИЛИСТИТЕ“ В БЪЛГАРИЯ – ПРОБЛЕМИ И РЕШЕНИЯ
Доц. д-р Румен Ерусалимов, д-р Николай Илиев 147

ФИСКАЛНА ПОЛИТИКА И МАКРОИКОНОМИЧЕСКА СТАБИЛНОСТ В УСЛОВИЯ НА КРИЗА: ЕМПИРИЧНИ ИЗМЕРЕНИЯ ЗА БЪЛГАРИЯ (2019–2022)
Доц. д-р Танер Исмаилов, доц. д-р Махмут Кадир Ишгювен 155

ЖИЗНЕНИЯТ ЦИКЪЛ НА ПОТРЕБИТЕЛИТЕ КАТО ФАКТОР ЗА ДИФЕРЕНЦИАЦИЯ НА ТЪРСЕНЕТО НА ЗАСТРАХОВАТЕЛНИ ПРОДУКТИ
Гл. ас. д-р Анелия Панева 163

ПОТЕНЦИАЛНА РОЛЯ НА ТЕЛЕМАТИЧНИТЕ СИСТЕМИ В ЗАСТРАХОВАНЕТО И ПОДОБРЯВАНЕ НА ПЪТНАТА БЕЗОПАСНОСТ В БЪЛГАРИЯ
Гл. ас. д-р Валентина Нинова 171

СЪСТОЯНИЕ НА ПРОФЕСИОНАЛНИТЕ ПЕНСИОННИ ФОНДОВЕ В БЪЛГАРИЯ И ВЪЗМОЖНОСТИТЕ ИМ ЗА ИЗПЛАЩАНЕ НА АДЕКВАТНИ ПЕНСИИ ЗА РАННО ПЕНСИОНИРАНЕ
Гл. ас. д-р Йордан Йорданов 179

РОЛЯТА НА ИНФЛАЦИЯТА ВЪРХУ ПОКУПАТЕЛНАТА СПОСОБНОСТ НА ДОМАКИНСТВАТА В БЪЛГАРИЯ
Гл. ас. д-р Петя Василева 188

ИЗКУСТВЕН ИНТЕЛЕКТ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА ПРЕД ПАЗАРА НА ТРУДА
Гл. ас. д-р Таня Илиева 195

ВОЛАТИЛНОСТТА КАТО АКТИВ: АНАЛИЗ НА VIX И ETF АЛТЕРНАТИВИ ЗА ИНВЕСТИТОРИТЕ
Гл. ас. д-р Цветан Павлов 201

СТАБИЛНОСТ НА БЪЛГАРСКИЯ БАНКОВ СЕКТОР В УСЛОВИЯТА НА МАКРОИКОНОМИЧЕСКИ ТУБОЛЕНЦИИ И ПОДГОТОВКА ЗА ЧЛЕНСТО В ЕВРОЗОНАТА
Ас. д-р Рая Драгоева 209

ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА АДАПТАЦИЯ НА БЪЛГАРСКИЯ ПАЗАР НА ТРУДА КЪМ ИЗКУСТВЕНИЯ ИНТЕЛЕКТ: СРАВНЕНИЕ С ЕС-27
Ас. Велислава Петрова 216

ВЛИЯНИЕТО НА РЕГЛАМЕНТА MICA ВЪРХУ ФИНАНСОВАТА СТАБИЛНОСТ И РИСКОВЕТЕ НА КРИПТО ПАЗАРА В ЕВРОПЕЙСКИЯ СЪЮЗ
Д-р Габриела Кръстева 224

ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА РАЗВИТИЕ И УСЪВЪРШЕНСТВАНЕ ОРГАНИЗАЦИОННАТА РАМКА НА ПЕНСИИТЕ ЗА ОСИГУРИТЕЛЕН СТАЖ И ВЪЗРАСТ В БЪЛГАРИЯ
Д-р Жанета Ангелова 230

ОЦЕНКА НА РИСКОВИЯ ПРОФИЛ НА ПЛАЩАНИЯТА ПО ЗАСТРАХОВКИ „ИМУЩЕСТВО“ И „КАСКО НА МПС“ НА ЗАСТРАХОВАТЕЛНИТЕ ПАЗАРИ В ЮГОИЗТОЧНА ЕВРОПА ЗА ПЕРИОДА 2015–2024 Г.
Д-р Радка Василева 238

ИСТОРИЯ НА ЕВРОТО: ВЪЗНИКВАНЕ, РАЗВИТИЕ И ЛОГИКА НА ВАЛУТНАТА КОНСТРУКЦИЯ
Докторант Атанаска Минчева 246

ДАНЪЧНИТЕ ОБЛЕКЧЕНИЯ КАТО РЕШЕНИЕ ЗА УСТОЙЧИВОТО ФИНАНСИРАНЕ НА МЛАДЕЖКИТЕ ЦЕНТРОВЕ В БЪЛГАРИЯ
Докторант Ахмед Куйтов 254

ОПТИМИЗИРАНЕ НА ПРОДАЖБИТЕ НА ЗАСТРАХОВАТЕЛНИТЕ КОМПАНИИ В УСЛОВИЯТА НА ТУРБУЛЕНТНОСТ
Докторант Габриела Спасова 261

СРАВНИТЕЛЕН ПРЕГЛЕД НА МЕТОДИТЕ ЗА ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ПЕНСИЯ ПРИ ПРИЛАГАНЕ НА ЕВРОПЕЙСКИТЕ РЕГЛАМЕНТИ И МЕЖДУНАРОДНИ ДОГОВОРИ В ОБЛАСТТА НА СОЦИАЛНАТА СИГУРНОСТ, ПО КОИТО РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ Е СТРАНА
Докторант Диляна Йорданова 269

ДЕКАРБОНИЗАЦИЯ И ИКОНОМИЧЕСКИ РАСТЕЖ В БЪЛГАРИЯ: ДИНАМИКА И ВЗАИМОВРЪЗКИ В КОНТЕКСТА НА ЗЕЛЕНИЯ ПРЕХОД
Докторант Иван Спасов 277

СИТУАЦИОНЕН АНАЛИЗ НА БАНКОВОТО ЖИЛИЩНО КРЕДИТИРАНЕ В БЪЛГАРИЯ – РЕГИОНАЛНИ АСПЕКТИ
Докторант Инна Борозенкова 284

ИЗКУСТВЕНИЯТ ИНТЕЛЕКТ ПРИ УПРАВЛЕНИЕТО НА ПАРИЧНИТЕ ПОТОЦИ И ЛИКВИДНОСТТА В ERP/BI СРЕДАТА: МЕХАНИЗМИ, ЕФЕКТИ, УСЛОВИЯ ЗА УСПЕХ
Докторант Кирил Пенев 292

КРИПТОВАЛУТИТЕ КАТО ПЛАТЕЖНО СРЕДСТВО: ИКОНОМИЧЕСКА ЛОГИКА, ОГРАНИЧЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВИ
Докторант Красимир Иванов 299

СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА АНТИИНФЛАЦИОННАТА ПАРИЧНА ПОЛИТИКА НА ФЕДЕРАЛНИЯ РЕЗЕРВ И ЕЦБ (2021-2025)
Докторант Кристиян Варамезов 307

ОРГАНИЗАЦИОННО-ИКОНОМИЧЕСКИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ДОПЪЛНИТЕЛНОТО ДОБРОВОЛНО ПЕНСИОННО ОСИГУРЯВАНЕ В НЯКОИ СТРАНИ ОТ ЕВРОПЕЙСКИЯ СЪЮЗ
Докторант Кристияна Милинова 316

РАЗВИТИЕ НА ПРЕДЯВЕНИТЕ ПРЕТЕНЦИИ КЪМ ГАРАНЦИОННИЯ ФОНД, СВЪРЗАНИ СЪС ЗАСТРАХОВКА „ГРАЖДАНСКА ОТГОВОРНОСТ НА АВТОМОБИЛИСТИТЕ“
Докторант Максим Колев 324

СЪСТОЯНИЕ И ТЕНДЕНЦИИ НА ФАРМАЦЕВТИЧНИЯТ ПАЗАР В БЪЛГАРИЯ
Докторант Маргарита Кръстева 331

ТЕОРЕТИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА TGARCH МОДЕЛА ЗА ОЦЕНКА НА ПАЗАРНИЯ РИСК
Докторант Петър Джелепов 337

СРАВНИТЕЛНА ОЦЕНКА НА ШЕСТТЕ НАЙ-ГОЛЕМИ ПЕТРОЛНИ КОМПАНИИ В СВЕТА ЧРЕЗ ПАЗАРНИ МУЛТИПЛИКАТОРИ P/B, P/IOS И P/E
Докторант Ралица Иванова 342

ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА ПРЕД ФИНАНСОВОТО УПРАВЛЕНИЕ НА ЕВРОПЕЙСКИ ОБРАЗОВАТЕЛНИ ПРОЕКТИ, ПОРОДЕНИ ОТ РАЗЛИЧИЯ В ТЪЛКУВАНЕТО НА ПРОГРАМНИТЕ ИЗИСКВАНИЯ
Докторант Славейко Славков 348

СУРОВИННАТА БАЗА В ЕВРОПЕЙСКИЯ СЪЮЗ КАТО ПРЕДПОСТАВКА ЗА ИНВЕСТИЦИОННА АКТИВНОСТ В МЕСОПРЕРАБОТВАТЕЛНИЯ СЕКТОР
Докторант Юли Станков 356

ДИГИТАЛНИТЕ РАЗПЛАЩАНИЯ И УПРАВЛЕНИЕТО НА ЛИЧНИЯ БЮДЖЕТ ПРИ СТУДЕНТИТЕ
Студент Галя Тулина 363

ЗАСТРАХОВАТЕЛНИТЕ ПАЗАРИ ПРЕДИ И СЛЕД ЕВРОТО: СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА БАЛТИЙСКИТЕ СТРАНИ И ИЗВОДИ ЗА БЪЛГАРИЯ
Студент Ивайло Василев 369

СЧЕТОВОДСТВО, КОНТРОЛ, ОДИТ, СТАТИСТИКА И МАТЕМАТИКА

ЗА ОСНОВОПОЛОЖНИКА НА СВИЩОВСКАТА АКАДЕМИЧНА СЧЕТОВОДНА ШКОЛА - ПРОФЕСОР ГОСПОДИН ТОШЕВ
Проф. д-р Атанас Атанасов 381

УСТОЙЧИВОСТ НА СЕЛСКОСТОПАНСКИТЕ ПРЕДПРИЯТИЯ И КАЧЕСТВО НА ОТЧЕТНАТА ИНФОРМАЦИЯ
Prof. Dimitrios P. Petropoulos, PhD, доц. д-р Галина Чиприянова 386

SEMI-TENSOR PRODUCT FOR FINITE GAMES WITH DETERMINISTIC STRATEGY DYNAMICS: A TUTORIAL
Prof. Renato De Leone, PhD..... 395

ОТЧИТАНЕТО НА УСТОЙЧИВОСТТА В БАНКИТЕ В БЪЛГАРИЯ – ФАКТОР ЗА ПОВИШАВАНЕ НА ТЯХНАТА КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТ
Доц. д-р Венцислав Вечев 404

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧНИ АСПЕКТИ НА ДИГИТАЛНАТА ТРАНСФОРМАЦИЯ В ОТЧЕТНОСТТА
Доц. д-р Галина Чиприянова 410

ВЪРХУ НЯКОИ АСПЕКТИ ПРИ ПРИЛАГАНЕ НА СИСТЕМАТА ЗА НАТРУПВАНЕ И ТРАНСФЕР НА КРЕДИТИ (ECTS) ПРИ ОБУЧЕНИЕТО ПО СЧЕТОВОДСТВО В ОКС „БАКАЛАВЪР“
Доц. д-р Галя Иванова – Кузманова..... 424

ИЗСЛЕДВАНЕ НА НАГЛАСИТЕ НА СТУДЕНТИТЕ ПО СЧЕТОВОДСТВО КЪМ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ИЗКУСТВЕН ИНТЕЛЕКТ В ОБУЧЕНИЕТО
Доц. д-р Даниела Александрова Георгиева..... 431

SUSTAINABILITY REPORTING IN THE PUBLIC SECTOR: INTERNATIONAL FRAMEWORKS, SECTOR-SPECIFIC CHARACTERISTICS AND PROSPECTS FOR BULGARIA
Доц. д-р Диана Папраданова..... 440

ИЗКУСТВЕНИЯТ ИНТЕЛЕКТ В СИСТЕМИТЕ ЗА АВТОМАТИЗИРАН КОНТРОЛ ВЪРХУ АВТЕНТИЧНОСТТА НА ЕВРОБАНКНОТИТЕ
Доц. д-р Зорница Ганчева 448

ГОТОВИ ЛИ СМЕ ЗА ОБЪРНАТО ПРЕПОДАВАНЕ ПО СЧЕТОВОДСТВО?
Доц. д-р Ива Монева 456

СТАНДАРТИЗИРАН ПОДХОД ЗА ПРЕДСТАВЯНЕ И ОПОВЕСТЯВАНЕ НА ИНФОРМАЦИЯ ЗА ФИНАНСОВИТЕ РЕЗУЛТАТИ ОТ ДЕЙНОСТТА НА ПРЕДПРИЯТИЯТА
Доц. д-р Иван Андреев..... 465

НЕСТАНДАРТНО ПРИЛОЖЕНИЕ НА КЛАСИЧЕСКИ ТЕХНИКИ ЗА ДЕТЕРМИНИРАН ФАКТОРЕН АНАЛИЗ
Доц. д-р Красимир Кулчев, гл. ас. д-р Галя Кушева 473

АНАЛИЗ НА ДИНАМИКАТА И СТРУКТУРАТА НА ЕМИСИИТЕ НА ВРЕДНИ ВЕЩЕСТВА В АТМОСФЕРАТА В БЪЛГАРИЯ
Доц. д-р Красимира Славева..... 479

РАЗХОДИТЕ ЗА ЗДРАВЕОПАЗВАНЕ ПО ФУНКЦИИ В БЪЛГАРИЯ – ДИНАМИКА, СТРУКТУРА И ЕВРОПЕЙСКИ СРАВНЕНИЯ
Доц. д-р Маргарита Шопова 489

ЦЕНТРАЛИЗИРАНОТО МИТНИЧЕСКО ОФОРМЯНЕ В ЕС – МИТ ИЛИ РЕАЛНОСТ
Доц. д-р Момчил Антов 499

СЧЕТОВОДНО ТРЕТИРАНЕ НА УСТОЙЧИВИТЕ ИНВЕСТИЦИИ В КОНТЕКСТА НА ТАКСОНОМИЯТА НА ЕВРОПЕЙСКИЯ СЪЮЗ
Доц. д-р Николина Грозева 507

ЗНАЧЕНИЕ НА НЕФИНАНСОВАТА (ЕКОЛОГИЧНА) ИНФОРМАЦИЯ ЗА ПОСТИГАНЕ НА ФИНАНСОВА УСТОЙЧИВОСТ В АГРАРНИЯ СЕКТОР
Доц. д-р Павлина Димитрова 513

ДИГИТАЛНА КОХЕРЕНТНОСТ НА КОНТРОЛНАТА СИСТЕМА: ПЪТ КЪМ ПРЕОДОЛЯВАНЕ НА ИНСТИТУЦИОНАЛНАТА ФРАГМЕНТАЦИЯ В БЪЛГАРИЯ
Доц. д-р Пепа Стойкова, Мариета Спасова 521

ДИНАМИЧНА КЛАСИФИКАЦИЯ НА ОБЛАСТИТЕ В БЪЛГАРИЯ СПОРЕД ПОКАЗАТЕЛИ ЗА ЛЕКАРСТВЕНИ ПРОДУКТИ, ЗАПЛАЩАНИ ОТ НЗОК
Доц. д-р Пламен Петков 526

ПРОФЕСИОНАЛНАТА ПРЕЦЕНКА В СЧЕТОВОДСТВОТО И СВЪРЗАНИТЕ С НЕЯ РИСКОВЕ: ПРОЯВЛЕНИЯ И ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ
Доц. д-р Радосвета Йорданова Кръстева-Христова 537

ПО ВЪПРОСА ЗА РЕНТАБИЛНОСТТА, ЛИКВИДНОСТТА И ОБРЪЩАЕМОСТТА НА ТЕКУЩИТЕ АКТИВИ НА ПРЕДПРИЯТИЕТО /МЕТОДИКА И МЕТОДОЛОГИЯ ЗА АНАЛИЗ/
Доц. д-р Росица Иванова 549

ПАРАДОКСИТЕ НА СЧЕТОВОДСТВОТО И СЧЕТОВОДНИТЕ ПРИНЦИПИ
Доц. д-р Светлозар Стефанов 557

ИНТЕГРИРАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТТА В ОДИТА: МССУ 5000 И ТРАНСФОРМАЦИЯТА НА ОДИТОРСКАТА ПРОФЕСИЯ
Доц. д-р Силвия Костова 566

ИЗСЛЕДВАНЕ НА СТРУКТУРНАТА ДИНАМИКА НА ВЪГЛЕРОДНИТЕ ЕМИСИИ В АТМОСФЕРАТА
Доц. д-р Стела Касабова 574

СТРАТЕГИЧЕСКО УПРАВЛЕНСКО СЧЕТОВОДСТВО И ИНФОРМАЦИОННО ОСИГУРЯВАНЕ НА УСТОЙЧИВАТА ТРАНСФОРМАЦИЯ НА БИЗНЕСА
Доц. д-р Галина Чиприянова, Цветелина Яламова, докторант 582

КОНТРОЛ И УПРАВЛЕНИЕ НА ФИНАНСОВОТО ЗДРАВЕ НА МАЛКИТЕ ОБЩИНИ В БЪЛГАРИЯ – ТЕНДЕНЦИИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА
Гл. ас. д-р Дияна Иванова 591

БИБЛИОМЕТРИЧЕН АНАЛИЗ НА ДАНЪЧНИТЕ ФОРМАЛНОСТИ И АДМИНИСТРАТИВНАТА ТЕЖЕСТ
Гл. ас. д-р Желью Желев 599

ОСОБЕНОСТИ ПРИ ВЪЗЛАГАНЕТО НА ИНСПЕКЦИОННА ДЕЙНОСТ ОТ ОРГАНИТЕ НА ДФИ
Гл. ас. д-р Надежда Цветкова..... 606

ТРАНСФОРМАЦИЯ НА СЧЕТОВОДСТВОТО В КОНТЕКСТА НА РАЗВИТИЕТО НА ИЗКУСТВЕНИЯ ИНТЕЛЕКТ
Гл. ас. д-р Ралица Данчева 613

ЕКОЛОГИЧНО УПРАВЛЕНСКО СЧЕТОВОДСТВО – КАК ДА ГО ИЗПОЛЗВАМЕ
Гл. ас. д-р Росен Колев 621

КРЕДИТНИЯТ АНАЛИЗ КАТО САМОСТОЯТЕЛНА НАУЧНА И УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА: ПРЕДМЕТ, МЕТОД И ИНФОРМАЦИОННА ОСНОВА В КОНТЕКСТА НА SAF-T
Д-р Петър Петров..... 629

КОЕФИЦИЕНТ НА КРИЗИСНА ЛИКВИДНОСТ (CLR) И ИНДЕКС ЗА СТАБИЛНОСТ (PSI) КАТО РАННИ СИГНАЛИ В КРЕДИТНИЯ АНАЛИЗ: МЕТОДИЧЕСКА РАМКА И ЕМПИРИЧНА АПРОБАЦИЯ
Д-р Петър Петров..... 637

ОТЧИТАНЕ НА УСТОЙЧИВОСТТА В ОРГАНИЗАЦИИТЕ ОТ ПУБЛИЧНИЯ СЕКТОР В БЪЛГАРИЯ – НОРМАТИВНИ И ИНФОРМАЦИОННИ АСПЕКТИ
Докторант Веселина Тодорова..... 645

СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА ОСНОВНИТЕ ИКОНОМИЧЕСКИ ПОКАЗАТЕЛИ В СЕЛСКОТО СТОПАНСТВО, ИЗЧИСЛЕНИ ПОСРЕДСТВОМ ИКОНОМИЧЕСКИТЕ СМЕТКИ ЗА СЕЛСКОТО СТОПАНСТВО И СИСТЕМАТА ЗА ЗЕМЕДЕЛСКА СЧЕТОВОДНА ИНФОРМАЦИЯ
Докторант Гергана Павлова 657

НОРМАТИВНА РАМКА И АДМИНИСТРАТИВНИ ПРОЦЕДУРИ ПРИ ПРИЕМА НА ЧУЖДЕСТРАННИ СТУДЕНТИ В РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
Докторант Диана Маринкова..... 666

ДИНАМИКА И СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА ИНДЕКСА НА ЧОВЕШКОТО РАЗВИТИЕ: МЯСТОТО НА БЪЛГАРИЯ В ЕВРОПА
Докторант Диана Мутафова 672

ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ, ПОДХОДИ И МЕТОДИ ПРИ ИЗВЪРШВАНЕТО НА СЪДЕБНО-СЧЕТОВОДНИ ЕКСПЕРТИЗИ
Докторант Димитър Иванов..... 680

СЧЕТОВОДСТВОТО В СЪВРЕМЕННАТА ИНФОРМАЦИОННА СРЕДА
Докторант Дияна Попова 689

ВНЕДРЯВАНЕ НА ОТЧЕТНОСТТА ЗА УСТОЙЧИВОСТТА В ПРЕДПРИЯТИЯТА – ОРГАНИЗАЦИОННИ И ПРАКТИЧЕСКИ АСПЕКТИ
Докторант Ивайло Кънев..... 698

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАШИННОТО ОБУЧЕНИЕ ЗА ПРОГНОЗИРАНЕ НА НЕОБХОДИМИТЕ КОЛИЧЕСТВА АНТИДИАБЕТНИ ЛЕКАРСТВА
Докторант Иван Митков 706

ПРОФЕСИОНАЛНИТЕ КОМПЕТЕНТНОСТИ НА СЧЕТОВОДНИЯ ПЕРСОНАЛ И КАЧЕСТВОТО НА ОТЧЕТНАТА ИНФОРМАЦИЯ
Докторант Иван Николов 714

ФОРМИРАНЕ И ПРЕДСТАВЯНЕ НА ФИНАНСОВИЯ РЕЗУЛТАТ (ТЕОРЕТИЧНИ ПОДХОДИ, МЕЖДУНАРОДНИ И НАЦИОНАЛНИ СЧЕТОВОДНИ РАЗБИРАНИЯ)
Докторант Ивелина Панайотова 721

МЕТОДИ ЗА ИЗМЕРВАНЕ НА БЕДНОСТТА –СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА АБСОЛЮТНИЯ, ОТНОСИТЕЛНИЯ И СУБЕКТИВНИЯ ПОДХОД
Докторант Нуридин Нуридин 731

ОТЧЕТНИЯТ ПРОЦЕС В ПРЕДПРИЯТИЕТО – СЪЩНОСТ, СТРУКТУРА И ОСНОВНИ ЕТАПИ
Докторант Пламена Николова 743

ОТЧЕТНОСТТА ЗА УСТОЙЧИВОСТ КАТО ИНСТРУМЕНТ ЗА ИНТЕГРИРАНО УПРАВЛЕНИЕ НА ПРЕДПРИЯТИЕТО
Докторант Рая Темнялова 754

ОСОБЕНОСТИ НА КОНТРОЛА ВЪРХУ ЕВРОПЕЙСКИТЕ СРЕДСТВА ПРИ ИЗПЪЛНЕНИЕТО НА ДИРЕКТНИТЕ ПЛАЩАНИЯ
Докторант Снежана Ясенова Парушева-Ламбева 764

КРЕДИТНИЯТ РЕЙТИНГ КАТО ФАКТОР ЗА УСТАНОВЯВАНЕ НА КРЕДИТОСПОСОБНОСТТА
Докторант Стоянка Бозвелиева 773

СЧЕТОВОДНАТА ПРОФЕСИЯ В КОНТЕКСТА НА ЕТИЧНИТЕ НОРМИ, ЕТИЧНА ПРЕЦЕНКА И ПРОФЕСИОНАЛНО РЕШЕНИЕ
Докторант Таня Димитрова Станева 780

ОСОБЕНОСТИ НА ВЗЕМАНИЯТА КАТО ОТЧЕТНИ ОБЕКТИ В ПЪТНОСТРОИТЕЛНИТЕ ПРЕДПРИЯТИЯ
Докторант Цветелина Мишонова 789

SEMI-TENSOR PRODUCT FOR FINITE GAMES WITH DETERMINISTIC STRATEGY DYNAMICS: A TUTORIAL

Renato De Leone[1]

Abstract: *This article introduces the semi-tensor product (STP) of matrices and its use in finite games with deterministic strategy dynamics. Pure strategies are encoded as canonical basis vectors, strategy profiles as STP products, and payoff functions as structure vectors. Moreover, deterministic synchronous strategy-updating rules are represented by logical matrices that are opportunely combined to form a global transition matrix. This representation makes fixed points, cycles, and finite-time convergence accessible through simple matrix calculations. A simple two-player boxed-pig game illustrates the construction, its pure Nash equilibrium, and the synchronous myopic best-response dynamics.*

Keywords: *Semi-tensor product, finite games, logical matrices, Nash equilibrium, best-response dynamics, finite-state dynamics.*

JEL: C72

1. Introduction

Game theory provides a mathematical framework for describing strategic interactions among decision makers whose outcomes depend not only on their own choices, but also on the choices of the other players. Finite games are an important class of games, and many strategic decision problems can be formulated by assuming a finite number of players, each endowed with a finite set of admissible strategies. Although the definition of a finite game is conceptually simple, its analysis may become increasingly difficult as the number of players and strategies grows. Moreover, when strategies evolve over time according to prescribed updating rules, the problem acquires a dynamical nature and leads naturally to evolutionary and networked evolutionary games.

Semi-tensor product (STP) of matrices provides an effective novel algebraic tool for dealing with this type of discrete structure. Originally introduced as a generalization of the conventional matrix product, the STP allows matrix products to be performed even when the usual dimension compatibility condition is not satisfied. More importantly in the context of finite games, it allows discrete variables and logical relations to be represented in matrix form. Each pure strategy can be identified with a canonical basis vector and a complete strategy profile can be represented through the semi-tensor product of the individual strategy vectors. Consequently, payoff functions, best-response conditions, strategy-updating rules, and evolutionary dynamics can be translated into algebraic relations involving vectors and matrices.

[1] School of Science and Technology, Università di Camerino, 62032 Camerino, Italy. E-mail: renato.deleone@unicam.it

We refer the interested reader to Cheng et al. (2021) for a more comprehensive survey on the STP approach to finite games, where a unified algebraic treatment of several classes of finite games is presented making possible to easily investigate problems such as potential games, Nash equilibria, game-theoretic control, and networked games.

A particularly relevant development, not discussed in this article, concerns networked and evolutionary games. Cheng et al. (2014) studied the dynamics and Nash equilibria of networked non-cooperative games, where each player interacts with the players belonging to its neighborhood and updates its strategy on the basis of locally available information. Also in this context STP can be used to convert strategies into logical vectors and payoff functions into algebraic expressions, so that the resulting networked evolutionary game can be represented as a discrete-time dynamical system making possible to investigate the relationship between local and global Nash equilibria and to study the evolution of the game using matrix-based techniques.

The same philosophy has been applied to more specific classes of evolutionary games. In Wang et al. (2019) networked evolutionary boxed-pig games with passive reward and punishment are studied and an algebraic representation of the evolutionary dynamics is derived.

The purpose of this paper is to provide a concise introduction to semi-tensor product and to illustrate how it can be used to better understand both finite and evolutionary games with deterministic strategy dynamics. Particular attention is devoted to the canonical representation of pure strategies, strategy profiles, and payoff functions, and to the representation of strategy-updating rules as logical matrices. The relationship between Nash equilibria and the algebraic representation of finite games is also discussed. Finally, a numerical boxed-pig example is presented in order to show explicitly how the same STP framework can be used first to describe a static finite game and then to construct its evolutionary counterpart as a discrete-time matrix system.

2. Semi-Tensor Product (STP) of Matrices

Semi-tensor product (STP) of matrices was originally introduced by Cheng (2001) representing a powerful new algebraic framework expanding the well-known operation of products of matrices.

Differently from matrix multiplication where the number of columns of the first matrix must be the same as the number of rows of the second, in STP the operation can be performed between matrices of arbitrary dimensions utilizing a suitable dimension expansion of them. Moreover, it reduces to the classical operation, when the standard matrix-matrix product operation can be performed.

Definition 2.1. Given two matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ the Kronecker product of A and B, denoted by $A \otimes B$, is the matrix defined in block form by

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix}.$$

The resulting matrix has dimension $mp \times nq$. ▫

Definition 2.2. (Cheng et al., 2010) The semi-tensor product of two matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ is defined as

$$A \ltimes B := (A \otimes I_{\frac{\alpha}{n}})(B \otimes I_{\frac{\alpha}{p}}) \tag{1}$$

where $\alpha = lcm(n,p)$ and I_k is the identity matrix $k \times k$. ▫

Let

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\\ 9 & 10\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

The standard matrix product$A \cdot B$ cannot be applied here since the number of columns of A is 2, while the number of rows of B is 3. For the semi-tensor product, let $t = \text{lcm}(2,3) = 6$.

Then

$$A \otimes I_3 \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \qquad B \otimes I_2 \in \mathbb{R}^{6\times 4},$$

so

$$A \ltimes B \in \mathbb{R}^{6\times 4}.$$

Let

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\\ 9 & 10\end{bmatrix}.$$

Since

$$t = \text{lcm}(2,3) = 6,$$

the semi-tensor product is

$$A \ltimes B = (A \otimes I_3)(B \otimes I_2) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 6\\ 7 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 7 & 0 & 8\\ 9 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 9 & 0 & 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 14 & 6 & 16\\ 18 & 5 & 20 & 6\\ 7 & 18 & 8 & 20\\ 15 & 28 & 18 & 32\\ 36 & 15 & 40 & 18\\ 21 & 36 & 24 & 40\end{bmatrix}.$$

For the semi-tensor product of matrices the associative law, the distributive law, and the seudo-commutative law hold (Cheng et al., 2010).

3. Finite Games and Deterministic Strategy Dynamics

A finite game is a game in which there are a finite number of players, and each player has a finite number of possible strategies.

Definition 3.1 (Finite Game). A finite non-cooperative game G is a a triplet $G = (N, S, c)$ where:

- $N = \{1,2,\dots,n\}$ is the finite set of players;
- S_i is the finite set of strategies available to player i;
- $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ is the set of all possible strategy profiles;
- $c_i: S \to \mathbb{R}$ is the payoff or cost function of player i.

Note that each possible combination of strategies determines a numerical payoff or cost for every player.

In the sequel, for each player i, we fix an enumeration $S_i = \{a_i^1, \dots, a_i^{k_i}\}$. With a slight abuse of notation, the strategy a_i^j is identified with its integer index j whenever it appears as an index of a canonical basis vector.

As an example, consider the classical two-player Prisoner's Dilemma where each player has two strategies C (Confess)or D (Do not confess). Here

$$N = \{1,2\} \text{ and } S_1 = S_2 = \{C, D\}.$$

Therefore,

$$S = \{(C,C), (C,D), (D,C), (D,D)\}.$$

Assume that the entries of the following matrix represent costs, such as years of imprisonment. Therefore, smaller values are preferred:

Table 1. Cost matrix of the Prisoner's Dilemma (smaller values are preferred)

	Player 2: C	**Player 2: D**
Player 1: C	(2, 2)	(0, 5)
Player 1: D	(5, 0)	(1, 1)

Source: Author's own elaboration.

The first component of each ordered pair is the cost of Player 1, whereas the second component is the cost of Player 2. Here, The first entry in each pair represents the cost of Player 1, while the second entry represents the cost of Player 2.

Definition 3.2 (Finite game with deterministic strategy dynamics). A finite game with deterministic strategy dynamics is defined as the quadruple $\mathcal{G} = (N, S, c, F)$,

where:

- $N = \{1,2, \dots, n\}$ is the finite set of players;
- S_i is the finite strategy set of player i;
- $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ is the set of all possible strategy profiles;
- $c_i: S \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n,$ is the payoff or cost function of player i;
- $F = (f_1, \dots, f_n)$ is the collection of deterministic strategy-updating rules $f_i: S \to S_i$.

If

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in S$$

denotes the strategy profile at time t of the n players, then the strategy of player i evolves according to

$$x_i(t+1) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{or in compact form} \quad x(t+1) = F(x(t)).$$

The updates are synchronous: all players evaluate the same profile $s(t)$ and update simultaneously. Since S is finite and F is deterministic, every trajectory eventually reaches a fixed point or a periodic orbit. A profile $s^* \in S$ is a fixed point if $F(s^*) = s^*$.

In this paper, the term evolutionary game is used in this restricted finite-state sense, namely, a finite game equipped with deterministic strategy dynamics. This usage should be distinguished from population-based evolutionary game theory, such as replicator dynamics.

For the Prisoner' dilemma introduced before, suppose that both players use a myopic best-response rule: at time $t+1$, each player chooses the strategy that minimizes his or her cost against the opponent's strategy at time t.

For Player 1, if Player 2 chooses C, then

$$c_1(C,C) = 2 < 5 = c_1(D,C),$$

so Player 1 chooses C.

If Player 2 chooses D, then

$$c_1(C,D) = 0 < 1 = c_1(D,D),$$

so Player 1 again chooses C.

Therefore,

$$f_1(x) = C, \qquad \forall x \in S.$$

By symmetry,

$$f_2(x) = C, \qquad \forall x \in S.$$

Hence, the global updating rule is

$$F(x) = (C,C), \qquad \forall x \in S,$$

and the deterministic strategy dynamics is

$$x(t+1) = F(x(t)) = (C,C).$$

Thus, independently of the initial strategy profile, the game reaches the final state (C,C) after one iteration.

Moreover, (C,C) is a fixed point of the deterministic strategy dynamics.

4. STP Representation of Finite Games with Deterministic Strategy Dynamics

The semi-tensor product provides a convenient algebraic representation of finite games by associating each pure strategy with a canonical basis vector.

In the sequel, with $\delta^{n,j}$ we indicate the jth column of the identity matrix of dimension n. It is not difficult to show that

$$\delta^{m,i} \ltimes \delta^{n,j} = \delta^{mn,(i-1)n+j}.$$

Consider a finite non-cooperative game as in Definition 3.1. Strategy $j \in S_i$ of player i can be represented by $\delta^{k_i,j}$.

Therefore, the set of pure strategies of player i can be represented as

$$\Delta_{k_i} = \left\{\delta^{k_i,1}, \delta^{k_i,2}, \dots, \delta^{k_i,k_i}\right\}.$$

Consider now a strategy profile

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S, \text{ where } s_i \in S_i.$$

Its STP representation is

$$\delta^{k_1,s_1} \ltimes \delta^{k_2,s_2} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_n,s_n}.$$

Since the semi-tensor product of canonical vectors is again a canonical vector, any strategy profile is represented by exactly by the single vector

$$\delta^{K,r} = \delta^{k_1,s_1} \ltimes \delta^{k_2,s_2} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_n,s_n},$$

where $K = \prod_{i=1}^{n} k_i$, and $r = 1 + \sum_{i=1}^{n}(s_i - 1)\prod_{j=i+1}^{n} k_j$.

Let

$$s^1, s^2, \dots, s^K$$

be all possible strategy profiles, ordered according to the canonical STP representation $\delta^{K,1}, \delta^{K,2}, \dots, \delta^{K,K}$.

For each player i, let

$$v^{i,c} = [c_i(s^1) \quad c_i(s^2) \quad \cdots \quad c_i(s^K)]^T.$$

the payoff or cost structure vector For the strategy profile s represented by $\delta^{K,r}$ the payoff or cost of player i is

$$c_i(s) = v^{i,c^T} \delta^{K,r}.$$

Let now

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$$

be a candidate Nash equilibrium (Nash, 1950, 1951; Osborne & Rubinstein, 1994). Its canonical representation is

$$\delta^{k_1,s_1^*} \ltimes \delta^{k_2,s_2^*} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_n,s_n^*}.$$

If c_i represents a payoff to be maximized, then s^* is a Nash equilibrium if, for every player i and every alternative strategy $s_i \in S_i$,

$$v^{i,c^T}\left(\delta^{k_1,s_1^*} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_i,s_i^*} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_n,s_n^*}\right) \geq v^{i,c^T}\left(\delta^{k_1,s_1^*} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_i,s_i} \ltimes \cdots \ltimes \delta^{k_n,s_n^*}\right).$$

Consider now the finite evolutionary game as in Definition 3.2. Again, let

$$s^1, s^2, \dots, s^K$$

denote all possible strategy profiles, ordered according to their canonical STP representation.

If at time t the strategy profile is $s(t) = s^{r(t)}$, then its canonical representation is $\delta_{K,r(t)}$.

For each player i, the updating rule

$$f_i: S \to S_i$$

assigns a new strategy to player i for each possible current strategy profile. Suppose that

$$f_i(s^r) = a_i^{\ell_i^r}, \qquad \ell_i^r \in \{1,2,\dots,k_i\}, \text{for } r = 1,2,\dots,K.$$

The new strategy of player i, when the current profile is s^r, is therefore represented by the canonical vector δ_{k_i,ℓ_i^r}.

The structure matrix associated with the updating rule of player i is given by

$$M^i = [\delta^{k_i,\ell_i^1} \quad \delta^{k_i,\ell_i^2} \quad \dots \quad \delta^{k_i,\ell_i^K}] \in \mathbb{R}^{k_i \times K}.$$

Taking into account that the vector $\delta_{K,r(t)}$ contains a single nonzero component in position $r(t)$,

$$M^i \delta^{K,r(t)} = \delta^{k_i,s_i(t+1)} \text{ where } s_i(t+1) = f_i(s(t)).$$

Thus, M^i provides an algebraic representation of the strategy-updating rule of player i.

The strategy global profile $s(t+1) = (s_1(t+1), s_2(t+1), \dots, s_n(t+1))$ at time $t+1$ can be canonically represented as

$$\delta_{K,r(t+1)} = \delta_{k_1,s_1(t+1)} \ltimes \delta_{k_2,s_2(t+1)} \ltimes \cdots \ltimes \delta_{k_n,s_n(t+1)}$$
$$= \left(M^1 \delta_{K,r(t)}\right) \ltimes \left(M^2 \delta_{K,r(t)}\right) \ltimes \cdots \ltimes \left(M^n \delta_{K,r(t)}\right).$$

The individual structure matrices can be combined through the Khatri–Rao product (Khatri & Rao, 1968; Liu, 1999):

$$M = M^1 * M^2 * \cdots * M^n \in \mathbb{R}^{K \times K},$$

and the complete evolutionary dynamics can therefore be written in the canonical algebraic form as

$$\delta_{K,r(t+1)} = M\delta_{K,r(t)}.$$

The transition matrix M describes completely the deterministic evolution of the finite game, and therefore fixed points, cycles, and the long-term behavior of the evolutionary process can be studied by analyzing M.

5. Numerical Examples

The following example is a simplified two-player version of the boxed-pig game without network structure or reward-punishment mechanisms. The aim is to illustrate the STP representation in a simple setting. The networked version with passive reward and punishment was studied by Wang et al. (2019).

There are two players,

$$N = \{1,2\},$$

where Player 1 is the big pig and Player 2 is the small pig.

Both players have the same strategy set $S_1 = S_2 = \{C, D\}$,

where

$$C = \text{press the pedal}, \qquad D = \text{wait close to the food vessel.}$$

Hence,

$$S = \{(C,C),(C,D),(D,C),(D,D)\}.$$

Consider the following payoff bi-matrix:

Table 2. Payoff bi-matrix of the boxed-pig game (larger values are preferred)

	Player 2: C	**Player 2: D**
Player 1: C	(6, 1)	(3, 3)
Player 1: D	(8, −2)	(0, 0)

Source: Author's own elaboration.

The first component of each ordered pair is the payoff of the big pig, whereas the second component is the payoff of the small pig. Larger values are preferred.

The two strategies can be associated with the canonical vectors

$$C \sim \delta^{2,1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \qquad D \sim \delta^{2,2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

The four strategy profiles are represented as

$$\begin{aligned}(C,C) &\sim \delta^{2,1} \ltimes \delta^{2,1} = \delta^{4,1},\\ (C,D) &\sim \delta^{2,1} \ltimes \delta^{2,2} = \delta^{4,2},\\ (D,C) &\sim \delta^{2,2} \ltimes \delta^{2,1} = \delta^{4,3},\\ (D,D) &\sim \delta^{2,2} \ltimes \delta^{2,2} = \delta^{4,4}.\end{aligned}$$

Therefore, the canonical ordering is $(C,C),\ (C,D),\ (D,C),\ (D,D)$. and the payoff structure vector of Player 1 is $v^{1,c} = [6,\ 3,\ 8,\ 0]^T$, while the payoff structure vector of Player 2 is $v^{2,c} = [1,\ 3,\ -2,\ 0]^T$.

For a strategy profile represented by $\delta^{4,r}$, the payoff of Player i is $c_i(s) = v_{i,c}^T \delta^{4,r}$.

For example, for the profile

$$(D,C) \sim \delta^{4,3},$$

we obtain

$$c_1(D,C) = v^{1,c^T}\delta^{4,3} = [6 \quad 3 \quad 8 \quad 0]\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 8,$$

and

$$c_2(D,C) = v^{2,c^T}\delta^{4,3} = [1 \quad 3 \quad -2 \quad 0]\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = -2.$$

Thus, $(c_1(D,C), c_2(D,C)) = (8,-2)$.

It is not difficult to verify that the unique Nash equilibrium is $(C,D) \sim \delta^{4,2}$.

We now construct the dynamic extension of the finite game of the previous finite game.

We assume here that both players use a synchronous myopic best-response rule, and at time $t+1$, each player chooses the best response to the strategy selected by the opponent at time t:

$$s_1(t+1) = BR_1(s_2(t)), \qquad s_2(t+1) = BR_2(s_1(t)).$$

Using the canonical ordering (C,C), (C,D), (D,C), (D,D), based on myopic best-response rule, Player 1 chooses, respectively, D, C, D, C.

Therefore,

$$M^1 = [\delta^{2,2} \quad \delta^{2,1} \quad \delta^{2,2} \quad \delta^{2,1}] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Thus, if the current profile is represented by $\delta^{4,r(t)}$, then $\delta^{2,s_1(t+1)} = M^1\delta^{4,r(t)}$.

Player 2 always selects D, independently of the current profile. Hence,

$$M^2 = [\delta^{2,2} \quad \delta^{2,2} \quad \delta^{2,2} \quad \delta^{2,2}] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

The canonical updating equation for Player 2 is $\delta^{2,s_2(t+1)} = M^2\delta^{4,r(t)}$.

The global transition matrix is obtained through the Khatri–Rao product

$$M = M^1 * M^2 = [\delta^{4,4} \quad \delta^{4,2} \quad \delta^{4,4} \quad \delta^{4,2}] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Therefore, the evolutionary dynamics can be written entirely in canonical form as

$$\delta^{4,r(t+1)} = M\delta^{4,r(t)}.$$

Also in this case it is not difficult to verify that (C,D) that is $\delta^{4,2}$ is a fixed point of the evolutionary dynamics since $M\delta^{4,2} = \delta^{4,2}$.

6. Conclusions

This paper presented the semi-tensor product, a useful algebraic framework for the representation and analysis of finite and evolutionary games. By associating pure strategies with canonical basis vectors, strategy profiles and payoff functions can be expressed in a compact matrix form. In evolutionary games, strategy-updating rules can similarly be represented by logical matrices, leading to a discrete-time algebraic description of the complete dynamics. The boxed-pig example illustrates how the same framework can be used to study both Nash

equilibria of a finite game and fixed points of its evolutionary extension. The STP approach therefore provides a natural connection between finite game theory, logical systems, and discrete-time dynamical systems.

References

Cheng, D. (2001). Semi-tensor product of matrices and its application to Morgen's problem. *Science in China Series: Information Sciences, 44*(3), 195–212.

Cheng, D., Qi, H., & Li, Z. (2010). *Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach*. Springer Science & Business Media.

Cheng, D., Wu, Y., Zhao, G., & Fu, S. (2021). A comprehensive survey on STP approach to finite games. *Journal of Systems Science and Complexity, 34*(5), 1666–1680. https://doi.org/10.1007/s11424-021-1232-8

Cheng, D., Xu, T., He, F., & Qi, H. (2014). On dynamics and Nash equilibriums of networked games. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 1*(1), 10–18. https://doi.org/10.1109/JAS.2014.7004614

Khatri, C. G., & Rao, C. R. (1968). Solutions to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A, 30*, 167–180.

Liu, S. (1999). Matrix results on the Khatri–Rao and Tracy–Singh products. *Linear Algebra and its Applications, 289*(1–3), 267–277. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10209-4

Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 36*(1), 48–49. https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48

Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics, 54*(2), 286–295. https://doi.org/10.2307/1969529

Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). *A course in game theory*. MIT Press.

Wang, J., Zhao, J., & Fu, S. (2019). Algebraization and optimization of networked evolutionary boxed pig games with passive reward and punishment. *Asian Journal of Control, 21*(5), 2415–2424. https://doi.org/10.1002/asjc.1837