

АЛГОРИТЪМ ЗА ИКОНОМЕТРИЧНА ОЦЕНКА НА АГРЕГИРАНАТА ПРОИЗВОДСТВЕНА ФУНКЦИЯ С ТРАНСЦЕДЕНТНАТА ЛОГАРИТМИЧНА (ТРАНСЛОГ) АПРОКСИМАЦИЯ

Гл. ас. д-р Пламен Иванов Петков

Катедра „Математика и статистика”

Стопанска академия „Д. А. Ценов”

Резюме: В студията се анализира зависимостта на Брутния вътрешен продукт от броя на заетите лица и брутното образуване на основен капитал в България с помощта на агрегираната производствена функция. Въз основа на тримесечни данни, с които е обхванат периода от първото тримесечие на 1996 г. до първо тримесечие на 2007 г., се изследва еластичността на замяната на производствените фактори. Апробирани са три вида производствени функции – производствена функция с променлива еластичност на замяната на факторите (VES-функция), производствена функция с постоянна еластичност на замяната на факторите (CES-функция) и класическа функция на Коб-Дъглас. Оценките на параметрите са получени с метода на най-малките квадрати, приложен върху трансцедентната логаритмична (транслог) апроксимация на производствената функция.

Ключови думи: агрегирани производствени функции, функция на Коб-Дъглас, производствена функция с постоянна еластичност на замяна на факторите, производствена функция с променлива еластичност на замяна на факторите, постоянна възвращаемост от мащаба, трансцедентна логаритмична (транслог) апроксимация, Тейлър ред

JEL: C52; O47

Abstract: The study analyzes the dependence of gross domestic product of the number of employees and gross fixed capital formation in Bulgaria with the help of the

aggregate production function. Based on quarterly data, which covered the first quarter of 1996 to the first quarter of 2007, is examined the elasticity of substitution of production factors. It is tested three types of production functions – a production function with variable elasticity of substitution of factors (VES-function), a production function with constant elasticity of substitution of factors (CES-function) and classical Cobb-Douglas function. Estimates of the parameters were obtained with the least squares method, applied to transcendental logarithmic (translog) approximation of the production function.

Keywords: aggregate production functions, Cobb-Douglas production function, Constant Elasticity of Substitution (CES) Production Function, Variable Elasticity of Substitution (VES) Production Function, Constant Returns to Scale, Transcendental logarithmic (translog) approximation, Taylor series

JEL: C52; O47

1. Въведение

С производствените функции се установява количествената връзка между получения от производствения процес пряк резултат и условията за неговото получаване. Резултатът обикновено се изразява под формата на произведената в натурално или стойностно изражение продукция на дадена производствена единица - предприятие, район, отрасъл, сектор или националната икономика. Когато става въпрос за производствена функция на националната икономика, тя отразява функционалната зависимост на произведения брутен вътрешен продукт от използваните в националното производство фактори.

От иконометрична гледна точка под производствена функция се разбира математическия израз (модела) за използваните комбинации от съчетания на производствените (ресурси) фактори при производството на определен обем продукция. С производствените функции се определя технологичната зависимост между количествените характеристики на разходите и

максималновъзможният обем на продукцията, която може да се произведе при тези разходи. Като основни производствени ресурси в иконометричното моделиране обикновено се използват капитала K (фактически използваният капитал), труда L (броят на заетите лица или отработеното от тях време в човекочасове или в човекодни) и технологията (обобщаващ показател, с който се отразява влиянието на невключените в модела производствени фактори и на техническия прогрес). Изхождайки от тези положения, общата функционална форма на производствената функция може да се запише като:

$$Y = F(K, L, A), \quad (1)$$

където:

K са разходите за капитал;

L – разходите за труд;

A – показател за обхващане влиянието на технико-технологичните производствени фактори.

Едно от основните свойства на производствените функции се свързва с характеризирането на ефективността от изменението в мащаба на производството. Това позволява да се установи с колко ще се увеличи обемът на производството с увеличението на всеки от факторите с λ . Ако обемът на производството също се увеличава λ пъти, ефективността не зависи от мащаба на производството и производствената функция е линейно-еднородна:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) = \lambda Y. \quad (2)$$

От съществено значение за установяване влиянието на факторите, както и за отчитането на ефектите от производството, е определянето на вида на производствените функции. Тяхното дефиниране изисква да се определи от една страна математическата форма на функцията, а от друга - вида и броя на включените в модела променливи. Пряко свързани с ефекта от мащаба на производството са заменяемостта между отделните фактори и влиянието на организационно-техническия прогрес. Замяната може да се осъществява в рамките на една и съща технология, между различни технологии за производство на един и същ продукт или между продукти с различна ресурсоемкост. В производствените функции техническият прогрес обикновено

се представя като функция на времето $A(t)$. Техническият прогрес влияе върху ефективността на отделния ресурс (производството нараства при постоянни количества на дадения фактор) или върху обема производството. От тази гледна точка производствената функция може да се отрази по три начина:

$$Y_t = F(K_t, A(t), L_t); \quad (3)$$

$$Y_t = F(K_t, L_t, A(t)); \quad (4)$$

$$Y_t = F(K_t, L_t) \cdot A(t). \quad (5)$$

В първия случай нараства производителността на капитала, т.е. налице е капиталоспестяващ технически прогрес, известен като технически прогрес по Харод. В (4) се увеличава производителността на труда. Налице е трудоспестяващ технически прогрес по Солоу. В (5) нараства съвкупната производителност на факторите. В литературата тази ситуация е известна като неутрален технически прогрес по Хикс.

Интересът към агрегираните производствени функции в България бе възобновен след 10.11.1989 г., макар, че и преди не липсват публикации по темата¹. Изследванията основно са насочени в две направления – измерване на ендогенния технически прогрес и свързания с него икономически растеж² или към измерване на потенциалното производство³. Характерното за повечето изследвания е, че те се осъществяват върху анализ на динамични редове, като се работи с тримесечни или годишни данни. Макар, да се споменават възможностите за прилагане на функции с постоянна или променлива

¹ Банчев, П. По някои въпроси на макроикономическите производствени функции. - Годишник на ВФСИ "Д. А. Ценов" – Свищов. Т. 46. Варна, Г. Бакалов, 1975, с. 41-84; Димитров, А. и др. Иконометрични макромоделни за развитието на народното стопанство. С., БАН, 1984; Димитров, А. Модели и методи за характеризирание развитието на икономиката. С., Наука и изкуство, 1968; Паскалев, О. Моделиране на самофинансиращи се научно-производствени системи. – В: Проблеми на управлението на научно-технически прогрес в стопанските организации (научно-практическа конференция). София-Бургас, 1982, с. 243-246;

² Рангелова, Р. Средносрочно прогнозиране на икономическия растеж в България. - Икономически изследвания, 2002, бр. 1, с. 3-29; Рангелова, Р. Теория на ендогенния икономически растеж – възникване и развитие. – Икономически изследвания, 1999, бр. 3, с. 3-27; Ганев, К. Измерване на общата факторна производителност: счетоводство на икономическия растеж за България. София, БНБ, „Дискуссионни материали”, 2005.

³ Гладнишки, А. Агрегирана производствена функция в България в условията на преход. София, АИАП, „Серия икономически изследвания”, 2004; Гладнишки, А. Измерване на потенциалното производство: използване инструментариума на производствените функции. София, АИАП, „Серия икономически изследвания”, 2005; Цалински, Цв. Два подхода за емпирична оценка на потенциалното производство на България. София, БНБ, „Дискуссионни материали”, 2006.

еластичност на замяната на производствените фактори, тези функции не са тествани емпирично. Акцентът изцяло се съсредоточава върху класическата функция на Коб-Дъглас. Тя се подлага на оценка както с включването на класическите фактори труд и капитал, така също и с включването на енергийни ресурси⁴, с неутрален технически прогрес по Хикс⁵ или с технически прогрес по Солоу.

Причината за използването на Коб-Дъгласовата функция се свързва с убежденията на изследователите, че тя е най-удачна за характеризирание на брутният вътрешен продукт на България. Основните доводи са два. Първият се свързва с нейния опростен вид и малкия брой параметри, подлежащи на оценка⁶. Вторият довод се обяснява с невъзможността да се определи степента на замяната между труда и капитала⁷. В проведените изследвания на агрегатната производствена функция в България по презумпция се приема, че еластичността на заместването между труда и капитала е равна на единица. Би било добре връзката между Брутният вътрешен продукт и производствените фактори да се изследва чрез тестването и на други видове производствени функции, при които еластичността на междуфакторната замяна е различна от единица. Изхождайки от тези съображения, **основната цел** на настоящото изследване е въз основа на емпирични данни да се провери валидността на различните теории за еластичността на замяната на производствените фактори и на ефекта от промяната в мащаба на производството като се използват възможностите на трансцедентната логаритмична апроксимация.

При иконометричния анализ на производствените функции се използват редица подходи, които могат да се обособят в две основни групи: **директно специфициране на иконометрични модели и индиректен подход, основаващ се на гъвкави методи за трансформация**. В първата група приложение

⁴ Гладнишки, А. (2004), Цит. съч.

⁵ Петков, Пл. Зависимост между заетите лица, инвестициите и БВП на Република България. Научен семинар „Измерения на промяната 1991-1996”, Свищов, 1996, с. 18-20.

⁶ Гладнишки, А. (2004), Цит. съч., с. 4.

⁷ Въпреки отчитането на факта, че българската действителност вероятно не би могла да се опише адекватно чрез производствена функция с фиксирани пропорции между факторите на производството, тестването е осъществено с функцията на Коб-Дъглас. За повече подробности вж. Гладнишки, А. (2005), Цит. съч., с.9.

намират линейният (при оценката на Коб-Дъгласовата функция) и нелинейният метод на най-малките квадрати (при оценка съответно на CES и VES производствените функции). Във втората група се отнасят апроксимативната трансцедентна логаритмична (транслог) трансформация, предложена от Кмента⁸, впоследствие генерализирана от Кристенсен, Йоргенсон и Ло⁹, и трансформацията на Бокс и Кокс¹⁰. Транслог функцията се оценява с помощта на линейния метод на най-малките квадрати, докато оценката на производствената функция с помощта на Бокс-Кокс трансформацията изисква използването на метода на максималното правдоподобие. Изборът на транслог апроксимацията в настоящото изследване се предопределя от нейната гъвкавост, техническа опростеност и възможността за използване на обикновения метод на най-малките квадрати. С нея могат да се оценят частните факторни еластичности, еластичността на замяната между факторите и ефекта от промяната в мащаба на производството без да е необходимо да се спазват никакви предварителни изисквания относно функционалната форма на производствената функция.

Изложението на разработката е следното. Първо е представен кратък теоретичен преглед на основните производствени функции. След това са разгледани възможностите за анализ на обобщената производствена функция чрез използване на транслог апроксимацията. В част четвърта са представени основните резултати от емпиричното изследване. Накрая са изложени основните изводи от изследването.

2. Функционални форми на производствените функции

Периодът от началото на 50-те до края на 70-те години на двадесети век се характеризира със засилен интерес на икономистите към производствените функции. Въпреки разнообразието от предлаганите спецификации и алгебрични форми, с които се анализират зависимостите между производствения резултат и

⁸ Kmenta, J. On Estimation of the CES Production Function. - International Economic Review, 1967, 8, pp.180-189.

⁹ Christensen, L., Jorgenson, D., Lau, L. Transcendental Logarithmic Production Frontiers. – Review of Economics and Statistics, 1973, 55, pp. 28-45.

¹⁰ Box, G., Cox. D. An analysis of transformations. - Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 26(2), 1964, pp. 211-243.

производствените фактори, сред най-често използваните в иконометричните изследвания производствени функции продължават да са функцията на Коб-Дъглас, функцията с постоянна замяна на факторите (CES) и функцията с променлива замяна на факторите (VES). В тази част ще се разгледа икономическата и математическата същност на тези функции, като акцентът се поставя върху тяхната иконометрична страна.

2.1. Производствена функция на Коб-Дъглас

Една от най-разпространените и най-често използвани производствени функции е функцията на Коб-Дъглас. Тя е предложена през 1928 г. от американските учени Чарлз Коб и Пол Дъглас¹¹. Нейният първоначален вид е следният:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (6)$$

където:

Y е стойността (обемът) на произведената продукция;

A – технологичното равнище на производството, $A > 0$;

K – вложеният в производството капитал;

L – вложеният в производството труд;

α, β - регресионни параметри (коефициенти на еластичност, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$), показващи с колко процента ще се измени размерът на продукцията при увеличение на конкретния фактор с един процент, при положение, че другия фактор не се променя.

Величината на A зависи от мерните единици, чрез които се изразяват Y , K и L . Освен това, със значението на A се определя ефективността на производствения процес.

В приложния макроикономически анализ важно място се отнежда на еластичността на производството по отношение на капитала и труда. С еластичността се характеризира процентното изменение в производството, предизвикано от изменението на съответния фактор с един процент. В общия

¹¹ Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production.- American Economic Review, 1928, 18 (Supplement), pp. 139-165.

случай еластичностите e_K и e_L зависят от величините на K и L , но във функцията на Коб-Дъглас те са постоянни и са равни съответно на параметрите α и β .

Еластичността на замяната между двата фактора (σ) се определя както следва:

$$\sigma = \frac{R(LR + K)}{KL \left(R \frac{\partial R}{\partial K} - \frac{\partial R}{\partial L} \right)}, \quad (7)$$

където R пределната норма на замяна между факторите, която се изчислява като отношение на частните производни:

$$R = \frac{Y'_L}{Y'_K} = \frac{\frac{\beta Y}{L}}{\frac{\alpha Y}{K}} = \frac{\beta K}{\alpha L}. \quad (8)$$

Изхождайки от равенствата:

$$\frac{\partial R}{\partial K} = \frac{\beta}{\alpha L} \text{ и } \frac{\partial R}{\partial L} = -\frac{\beta}{\alpha L^2}, \text{ получаваме:}$$

$$R(LR + K) = \frac{\beta K}{\alpha L} \left(\frac{\beta K}{\alpha} + K \right) = \frac{\beta K^2 (\alpha + \beta)}{\alpha^2 L}; \quad (9)$$

$$KL \left(R \frac{\partial R}{\partial K} - \frac{\partial R}{\partial L} \right) = KL \left(\frac{\beta^2 K}{\alpha^2 L^2} + \frac{\beta K}{\alpha L^2} \right) = \frac{\beta K^2 (\alpha + \beta)}{\alpha^2 L}. \quad (10)$$

Замествайки (9) и (10) в (7) се установява, че еластичността на замяната във всяка точка от кривата, характеризираща производствената функция на Коб-Дъглас, е равна на единица ($\sigma = 1$).

Ефектът от изменението на мащаба на производството се определя с помощта на коефициентите на еластичност α и β . Функцията е еднородна на степен $(\alpha + \beta)$. Когато $\alpha + \beta = 1$, функцията на Коб-Дъглас е линейно хомогенна. Налице е постоянна ефективност по отношение мащаба на производството, т.е. равнището на ефективност не зависи от мащабите на производството. При увеличение на всеки от факторите с 20%, производството също нараства с 20%. Ако $\alpha + \beta < 1$, функцията е хомогенна, но с намаляваща ефективност от

изменението в мащабите на производството. Когато $\alpha + \beta > 1$ е налице увеличаваща се ефективност при изменението в мащабите на производството.

За да се изчислят оценките на регресионните параметри, функцията се линеаризира, след което се използва метода на най-малките квадрати. Линеаризацията се постига чрез трансформирането ѝ в логаритмичната форма:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L. \quad (11)$$

При наличие на линейна еднородност, функцията на Коб-Дъглас има следния вид:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}. \quad (12)$$

Тя може да се запише още и по следните начини:

$$\frac{Y}{L} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha \quad (13)$$

или след логаритмуване:

$$\ln \left(\frac{Y}{L} \right) = \ln A + \alpha \ln \left(\frac{K}{L} \right). \quad (14)$$

В (13) и (14) функцията характеризира връзката производителността на труда и осигуреността на капитала с труд (капиталовъоръжеността).

Функцията на Коб-Дъглас е подходяща при анализиране на средноголеми производства, в които е налице относителна устойчивост. Нейната класическа форма е предназначена за оценка влиянието на два фактора. Ако се предположи, че върху производството влияние оказват m на брой фактори, функцията на Коб-Дъглас може да се представи чрез следния общ вид:

$$Y = AF_1^{a_1} F_2^{a_2} \dots F_m^{a_m} = A \prod_{i=1}^m F_i^{a_i}, \quad (15)$$

където:

F_i са производствените фактори;

a_i – коефициентите на еластичност на производствените фактори.

Оценката на параметрите A и a_i се извършва с помощта на метода на най-малките квадрати, приложен върху логаритмично трансформираната функция:

$$\ln Y = \ln A + \sum_{i=1}^m a_i \ln F_i. \quad (16)$$

В края на 60-те години на миналия век, когато науката е подвластна на технологичния оптимизъм, се предлага модифициран вариант на функцията на Коб-Дъглас. Като трети фактор под формата на експоненциален елемент се въвежда променливата „технически прогрес”. С нея се оценява влиянието на еволюционните изменения в техниката (машини, съоръжения, оборудване и др.), технологиите в производството, квалификацията на работната сила, организацията на труда и др. Модифицирането се извършва в две направления – техническия прогрес се въвежда екзогенно (външно) или ендогенно (вътрешно) като производствен фактор. В първото направление работи известния холандски икономист, лауреат на Нобелова награда Ян Тинберген. Той въвежда техническият прогрес като самостоятелен фактор в производствената функция, като по този начин го приравнява с капитала и труда. Това в литературата се определя като неутрален технически прогрес по Хикс. Тъй като техническият прогрес зависи от времето, моделът на Коб-Дъглас придобива следният вид:

$$Y = AK^\alpha L^\beta e^{nt}, \quad (17)$$

където:

e^{nt} е променливата, идентифицираща се с „технически прогрес”;

n – регресионен параметър, представляващ темпа на прираста (под формата на коефициент) в резултат на техническия прогрес и математически се получава като частна производна на функцията по отношение на времето t , т.е.

$n = \frac{\partial \ln F}{\partial t}$. Техническият прогрес се определя още като „нематериализиран”,

защото е следствие от подобряването организацията на труда, подобряването управлението на производството и др. фактори, които не са пряко свързани нито с труда, нито с капитала.

Регресионните параметри се изчисляват с помощта на метода на най-малките квадрати като се съставя система с четири нормални уравнения. Преди това функцията трябва да се приведе в логаритмична форма:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + nt. \quad (18)$$

При второто направление техническият прогрес се въвежда ендогенно, което намира изражение в изменението на съотношението между капитала и

труда. Както вече споменахме, пределната норма на заместване на един фактор с друг показва какво количество капитал е необходимо за да се замени една единица труд. Еластичността на замяна между факторите на производството показва с колко процента ще се променят разходите за капитал при изменение на разходите за труд с 1%. Това означава, че изменението на пределната норма на заместване с 1% трябва да доведе до изменение в съотношението между факторите на производство с процента на изменение на еластичността на замяната.

2.2. Производствена функция с постоянна еластичност на замяна на факторите (CES-функция)

При практическото приложение на Коб-Дъгласовата производствена функция се установява, че някои от предположенията, стоящи в основата на модела при нейното построяване, не се потвърждават. Твърде силно е ограничението при функцията на Коб-Дъглас еластичността на замяната между факторите да е равна на единица. Развитие в тази насока представлява въведената през 1961 г. от американските икономисти К. Ароу, Х. Ченъри, Б. Минхас и Р. Солоу¹² производствена функция с постоянна еластичност на заместване между факторите (CES, съкращение от Constant Elasticity of Substitution). В литературата е известно още и като SMAC-производствена функция. Нейният вид е следният:

$$Y = A[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}]^{-\gamma/\rho}, \quad (19)$$

където A , δ , γ , ρ са параметри на функцията, удовлетворяващи условията:

$$A > 0, \delta \in [0; 1], \rho \in [-1; 0) \cup (0; +\infty), \gamma > 0.$$

Параметърът A се интерпретира като коефициент на полезно действие, характеризиращ неутралната ефективност на технологиите. Величината му зависи от мерните единици, с които се изразяват производството, труда и капитала. Той може да се използва като измерител на ефективността на производствения процес.

¹² Arrow, K., Chenery, H., Minhas, B., Solow, R. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. - Review of Economics and Statistics, XLIII, no. 3 (August 1961), pp. 225-250.

Параметърът δ определя разпределението на общия ефект между факторите труд и капитал.

Параметърът γ представлява сумата от частните факторни еластичности и характеризира ефективността от промяната в мащаба на производството.

Параметърът ρ идентифицира степента на замяната на двата фактора.

Основните предимства на CES-функцията се свързват с факта, че в нея се включват достатъчно на брой параметри за адекватно характеризиране на производствения процес и за различните форми (видове) на техническия прогрес. Освен това, еластичността на замяната на факторите не се задава предварително, а се определя въз основа на емпиричните данни.

Еластичността на замяната между факторите¹³ не зависи от значенията на Y , K и L , а само от параметъра ρ (с това всъщност се свързва и наименованието на производствената функция):

$$\sigma = \frac{1}{1 + \rho}. \quad (20)$$

Когато ρ клони към нула, при което σ е равна на единица, CES функцията се трансформира във функция на Коб-Дъглас, т.е. $Y = AK^{\delta\lambda}L^{(1-\delta)\lambda\gamma}$. Степенните показатели са равни на частните факторни еластичности и не зависят от капиталовъоръжеността.

Влиянието на мащаба на производството върху равнището на ефективността е следното. При увеличението на разходите за труд и капитал с λ пъти, обемът на произведената продукция се изменя по следния начин:

$$Y' = A[\delta\lambda^{-\rho}K^{-\rho} + (1-\delta)\lambda^{-\rho}L^{-\rho}]^{\gamma/\rho} = \lambda^{\gamma}Y. \quad (21)$$

При $\gamma=1$, ефективността не зависи от мащаба на производството. Когато $\gamma>1$, с разширяването на мащабите на производството се увеличава и неговата ефективност. Обратно, при $\gamma<1$ разширяването на производството води до намаляване на ефективността му. Както при функцията на Коб-Дъглас, и при CES-функцията ефективността на производствения процес се определя от избора на значенията на параметрите (и по-специално на параметъра γ), а не зависи от величините на K и L .

¹³ Винн, Р., Холден, К. (1981) Цит. съч., с. 74.

За да се изчислят параметрите на функцията е необходимо да се логаритмуват двете ѝ страни:

$$\ln Y = \ln A - \frac{\gamma}{\rho} \ln(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}). \quad (22)$$

CES-функцията е нелинейна и не може да се превърне в линейна дори след нейното логаритмуване. Оценките на параметрите се изчисляват с помощта на нелинейния метод на най-малките квадрати, при който възникват различни проблеми, свързани с определянето на локалния екстремум на функцията. В CES-функцията също могат да се включват допълнителни фактори, в това число експоненциален елемент, характеризиращ влиянието на техническия прогрес. Логаритмичната форма на функцията с включен неутрален технически прогрес е следната:

$$\ln Y = \ln A - \frac{\gamma}{\rho} \ln(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}) + nt. \quad (23)$$

2.3. Производствена функция с променлива еластичност на замяна на факторите (VES-функция)

През 1968 г. Лу и Флетчер¹⁴ предлагат обобщен вариант за CES-функцията, в който е възможно да се изследва и променливата еластичност на замяната на факторите (VES, съкращение от Variable Elasticity of Substitution):

$$Y = A \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)\eta \left(\frac{K}{L} \right)^{-c(1+\rho)} L^{-\rho} \right]^{-1/\rho}, \quad (24)$$

където:

$$\rho = \frac{1}{b-1}; \quad (25)$$

$$\eta = \frac{1-b}{1-b-c}. \quad (26)$$

Както при CES-функцията и тук:

A е параметърът, характеризиращ ефективността на производството;

¹⁴ Lu, Yao-Chi, Fletcher, L. Generalization of the CES Production function. – Review of Economics and Statistics, 50(4), 1968, pp. 449-452.

δ – параметърът, характеризиращ разпределението на общия ефект между факторите труд и капитал;

ρ – параметърът, идентифициращ степента на замяната между двата фактора.

Функцията на Лу и Флетчер удовлетворява всички изисквания на неокласическата теория за производството. В допълнение, еластичността на замяната на производствените фактори не е постоянна, а е функция от отношението между капитала и труда. В зависимост от значенията, които приемат параметрите b и c в (25) и (26), функцията (24) се трансформира в други производствени функции:

- когато $c = 0$ се получава CES-функцията;
- при $c = 0$ и $b = 0$ – функция с постоянни параметри;
- при $c = 0$ и $b = \infty$ – линейна хомогенна производствена функция;
- при $c = 1$ – линейно еластична производствена функция, предложена от Сато и Реванкар, която ще бъде представена по-късно.

При спазване на предположението, че в конкурентен пазар, целта на всяко производство е да се минимизират разходите, еластичността на замяната на факторите при VES-функцията на Лу и Флетчер се определя по следния начин:

$$\sigma = (1 - \rho)^{-1} \left[1 - c \left(1 + \frac{wL}{rK} \right) \right], \quad (27)$$

където wL и rK са относителните дялове на труда и капитала в производството.

Предположението за минималните производствени разходи и използването на дяловете при определянето на еластичността на замяната на факторите ограничава практическото приложение на функцията на Лу и Флетчер. През 1967 г. Сато¹⁵ и през 1971 г. Реванкар¹⁶, независимо един от друг, предлагат производствената функция с променлива еластичност на замяна на факторите, в която еластичността на заместването е линейна функция на съотношението между капитала и труда, а не логаритмично-линейна, както е при CES. По този начин еластичността на заместването се обвързва с темповете на

¹⁵ Sato, R. Linear Elasticity of Substitution Production Functions. – *Metroeconomica*, 19, 1967, pp. 33-41.

¹⁶ Revankar, N. A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions. – *Econometrica* 39, 1971, pp. 61-71.

икономическо развитие. Формата на функцията, която както споменахме по-горе е частен случай на функцията на Лу и Флетчер, се представя по следния начин:

$$Y = AK^{\rho(1-\delta\mu)}[L + (\mu - 1)K]^{\rho\delta\mu} \quad (28)$$

където A , α , β и ν са регресионни параметри, удовлетворяващи условията:

$$A > 0; \rho > 0; 0 < \delta < 1; 0 \leq \delta\mu \leq 1; \frac{L}{K} > \frac{1-\mu}{1-\delta\mu}.$$

Еластичността на замяна между капитала и труда се определя от параметъра β и от разполагаемия капитал на човек от населението, който е показател за характеризиране на икономическото развитие:

$$\sigma = 1 + \frac{\mu - 1}{1 - \delta\mu} \left(\frac{K}{L} \right) = 1 + \beta \frac{K}{L} = 1 + \beta k. \quad (29)$$

След заместване на израза (29) в (28), VES-функцията на Реванкар може да се представи по следния начин:

$$Y = AK^{\alpha\rho}[L + \alpha\beta K]^{(1-\alpha)\rho}, \quad (30)$$

където $\alpha = 1 - \delta\mu$.

Параметърът ρ характеризира промяната в еластичността на замяната между факторите. При изпълнение на условията $\rho=1$ и $\beta=0$, VES-функцията се трансформира във функция на Коб-Дъглас. Използването на VES-функцията е свързано с намаляването на ограниченията в модела, но затруднява специфицирането и особено икономическата интерпретация на параметрите.

Оценката на параметрите се извършва с нелинейния метод на най-малките квадрати, приложен върху логаритмичната форма на функция (30):

$$\ln Y = \ln A + \alpha\rho \ln K + (1-\alpha)\rho \ln(L + \alpha\beta K). \quad (31)$$

При постоянен ефект от изменението на мащаба ($\rho = 1$), моделът (31) придобива следният вид:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln(L + \alpha\beta K). \quad (32)$$

Във VES-функцията също има опция за включване на техническия прогрес. По аналогия с функцията на Коб-Дъглас и CES-функцията това се осъществява чрез експоненциален елемент. Общият вид на логаритмичната форма се представя по познатия начин:

$$\ln Y = \ln A + \alpha\rho \ln K + (1-\alpha)\rho \ln(L + \alpha\beta K) + nt \quad (33)$$

При анализирането на зависимостта между производството и производствените фактори действителната функционална форма не бива и не може да се определя самоцелно. Тъй като в икономиката не всичко е толкова опростено, ясно и лесно за описване, обичайна практика е използването на съвкупност от различни видове функции. Тяхната състоятелност, приложимост и надеждност се определят в процеса на иконометричното моделиране, въз основа на строги критерии и оценки. Изборът трябва да се предопределя от различни критерии, които могат да се обобщят в четири групи, в зависимост от това дали са свързани с *приемането на дадени хипотези, статистическите оценки, характера на данните или насоките на приложение*. Ако очакваните хипотези, издигнати с дадена функция са приемливи или полезни, то тази функция може да се приеме като подходяща. Функционалната форма оказва влияние върху статистическия процес по оценката на параметрите. Наличността на данните, тяхното качество, както и наличието на съответен софтуерен продукт също предопределят избора на функционалната форма за статистическа оценка. Някои функции не позволяват параметрите да се изчисляват с метода на най-малките квадрати, а прилагането на други методи за оценка не винаги води до надеждни резултати. Третата категория критерии се свързва с адекватността на изпробваните функционални модели при работата с конкретните числови данни. Последната група критерии е свързана с приложния характер на апробираните модели. Ако дадена функция е подходяща за симулационни или оптимизационни процедури, то за анализ на реални данни може да има по-подходяща от нея.

3. Трансцедентната логаритмична (транслог) апроксимация като гъвкав метод за оценка на производствените функции

През последните години все по-често в иконометричната практика изследването на производствените функции се основава на използването на гъвкави функционални форми, защото те позволяват да се моделират ефекти от втори порядък, каквито са частните факторни еластичности и еластичността на

замяна между факторите. С линейната производствена функция, тези еластичности се ограничават като се приравняват на нула, а при логлинейните модели (какъвто е моделът на Коб-Дъглас например), еластичностите са ограничени в интервала от -1 до +1. Най-популярната и най-надеждната сред съвкупността от разработените в литературата гъвкави функционални форми остава транслог функцията¹⁷, която обикновено се интерпретира като апроксимация на неизвестна производствена функция, представена чрез Тейлъров ред от втори порядък. Тази функция е предложена като общобобщена форма на VES-функцията¹⁸, с която се установява еластичността на замяната като същевременно се описва реалния производствен процес. Развитието по Тейлър (ред на Тейлър) е апроксимация на реална функция чрез представянето ѝ като безкраен ред с общ член, изчислен от значенията на производните на функцията в дадена точка. Ако функцията е безброй пъти диференцируема в отворения интервал $(a-r, a+r)$, нейното развитие по Тейлър се представя по следния начин:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad (34)$$

където $f^{(n)}(a)$ е n -та производна на функцията.

Ако представим общата производствена функция в логаритмичен вид $\ln Y = f(\ln X_1, \dots, \ln X_k)$, нейното развитие в Тейлъров ред от втори порядък около точката $x = [1, 1, \dots, 1]'$, в която логаритъмът на всяка променлива е приблизително равен на нула, е:

$$\ln Y = f(0) + \sum_{k=1}^K \left[\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \ln X_k} \right]_{\ln x=0} \ln X_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \left[\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial \ln X_k \partial \ln X_l} \right]_{\ln x=0} \ln X_k \ln X_l + \varepsilon. \quad (35)$$

Случайният компонент ε отразява влиянието на невключените в модела фактори и грешката на апроксимация до неизвестната функция. Понеже

¹⁷ Вж. Green, W. *Econometric Analysis*. 5th edition. Prentice Hall, 2003, pp.12-13; 367.

¹⁸ Вж. Christensen, L., Jorgenson, D., Lau, L. *Transcendental production frontiers*. – *The Review of Economics and Statistics*, 1973, 55, pp. 28-45; Berndt, E., Christensen, L. *The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U.S. Manufacturing, 1929-1968*. – *Journal of Econometrics*, 1973, 1, pp. 81-114.

функцията и нейните производни във фиксираната точка 0 са константни величини, те могат да се разглеждат като коефициенти:

$$\ln Y = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln X_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \beta_{kl} \ln X_k \ln X_l + \varepsilon. \quad (36)$$

Класическият двуфакторен транслог модел на производствената функция, с който се изследва влиянието на логаритмите на труда и капитала върху логаритъма на производствения резултат се представя по следния начин:

$$\ln Y = \alpha_0 + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \frac{1}{2} \alpha_{KK} (\ln K)^2 + \frac{1}{2} \alpha_{LL} (\ln L)^2 + \alpha_{LK} \ln L \ln K. \quad (37)$$

Оценката на параметрите се извършва с обикновения метод на най-малките квадрати. Свободният член α_0 отразява влиянието на невключените в модела фактори, който често се интерпретира като „многофакторна производителност”. Параметрите β_K и β_L характеризират линейния ефект на факторите върху производството. Параметърът β_{LK} отразява равнището на взаимодействие между двата фактора, а параметрите пред квадратите на логаритмите на производствените фактори характеризират променливата еластичност на тяхната замяна. Когато β_{LK} е статистически значим, еластичността на производството по отношение на даден фактор зависи от равнището на другия фактор (факторите се допълват). Транслог функцията е достатъчно гъвкава. Състои се както от линейни, така и от квадратични елементи. Освен това позволява включването на повече от два фактора. Такава например е функцията на Диуърт, в която като трети производствен фактор се въвеждат материалните разходи.

Ръстът в икономиката до голяма степен се обуславя от техническите изменения. За пръв път този извод се изтъква от Солоу¹⁹, който доказва, че техническият прогрес е основният източник за икономическия растеж в САЩ през 20-ти век. Солоу представя равнището на техническите изменения (техническият прогрес) като „остатъчен елемент” от регресионния модел, който отразява действието не само на технологичните промени, но също и

¹⁹ Solow, R. Technical Change and the Aggregate Production Function. – The Review of Economics and Statistics, 1957, 39, pp.312-320.

необхватаните в модела (измерими и неизмерими) фактори, които предполагаемо въздействат положително върху производството. В резултат, остатъчният елемент обикновено надценява действителното влияние на технологичните изменения в производствения процес. Все пак, с включването в производствената функция на допълнителни фактори (освен труда и капитала), в това число и на фактори, свързани с обкръжаващата среда, изместването в оценката на действителните равнища на техническия процес може да бъде редуцирано. В иконометричните изследвания на производствената функция, обхващането на техническия прогрес може да се осъществи по два начина: чрез подхода на единичния времеви тренд (т.е. включване на детерминистичен времеви тренд при оценката на производствената функция като екзогенна променлива)²⁰ и чрез подхода на общия индекс (*General Index* или *GI* подход)²¹. При първия подход (*Time trend* или *TT* подход), трендът може да е линеен или нелинеен, като същевременно позволява специфицирането на гъвкави функционални форми, в които се включват взаимодействия между времето и другите фактори. Общият двуфакторен модел се представя по следния начин:

$$\ln Y = \alpha_0 + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \alpha_t t + \frac{1}{2} \beta_{KK} (\ln K)^2 + \frac{1}{2} \beta_{LL} (\ln L)^2 + \frac{1}{2} \beta_{tt} t^2 + \beta_{LK} \ln L \ln K + \beta_{Kt} t (\ln K) + \beta_{Lt} t (\ln L). \quad (38)$$

Така специфицираният модел позволява техническият прогрес да е както променлив (т.е. налице е разлика от постоянната възвращаемост на производството), така и различен от неутрален. Диференцирането на производствената функция (намиране на частната производна) по отношение на времето представлява измерител на техническия прогрес:

$$TP_{TT} = \alpha_t + \beta_{tt} t + \beta_{Kt} \ln K + \beta_{Lt} \ln L. \quad (39)$$

При изпълнение на условията за перфектна конкуренция, еластичността на производството по отношение на производствените фактори се получава с помощта на частните производни на транслог функцията:

²⁰ Вж. Solow, R., 1957, op. cit.; Christensen et al, 1973, op. cit; Tinbergen, J. Critical Remarks on Some Business Cycle Theories. – *Econometrica*, 1942, 10, pp. 129-146.

²¹ Baltagi, B., Griffin, J. A Generalized Error Component Model with Heteroscedastic Disturbances. – *International Economic Review*, 1982, 29, pp.745-753.

$$\begin{aligned} e_K &= \alpha_K + \beta_{KK} \ln K + \beta_{KL} \ln L + \beta_{Kt} t; \\ e_L &= \alpha_L + \beta_{KL} \ln K + \beta_{LL} \ln L + \beta_{Lt} t. \end{aligned} \quad (40)$$

Основната слабост на този подход е, че с него се възприема съществуването на гладък, постепенен модел на икономически ръст с неопределен прогрес. За да се обхванат настъпилите промени в техническия прогрес през отделните времеви периоди в изследването (в конкретния случай тримесечия) може да се използва *GI* подхода. При него се използва набор от различни времеви фиктивни (*dummies*) променливи, чиито взаимодействия с другите обясняващи променливи позволяват да се изчисли общия индекс на техническия прогрес. Общата спецификацията на транслог модела при *GI* подхода е следната:

$$\begin{aligned} \ln Y &= \alpha_0 + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \lambda_t + \frac{1}{2} \beta_{KK} (\ln K)^2 + \frac{1}{2} \beta_{LL} (\ln L)^2 + \\ &+ \beta_{LK} \ln L \ln K + \beta_{Kt} t(\ln K) + \beta_{Lt} t(\ln L), \end{aligned} \quad (41)$$

където λ_t са фиктивните променливи.

Еластичността на производствения резултат по отношение на труда и капитала се определя както при първия подход, а техническият прогрес се получава по следния начин:

$$TP_{GI} = (\lambda_t - \lambda_{t-1}) + \beta_{Kt} \ln K + \beta_{Lt} \ln L. \quad (42)$$

Техническият прогрес, независимо с кой подход е определен, може да се разложи на два компонента – чист (неутрален) и различен от неутралния. Чистият технически прогрес се свързва с неутралната промяна в производствената функция (т.е. всички фактори се влияят в еднаква степен от техническите промени), а различният от неутралния технически прогрес влияе по различен начин на отделните фактори. Чистият компонент на техническия прогрес, получен с *TT* подхода се определя с израза $(\alpha_t + \beta_{tt})$, а при *GI* подхода – като $(\lambda_t - \lambda_{t-1})$. Отклонението от неутралния технически прогрес и при двата подхода се свързва с израза $\beta_{Kt} \ln K + \beta_{Lt} \ln L$.

Възвращаемостта (ефектът) от промяната в мащаба на производството зависи от равнището (от мерните единици) на производствените фактори и от

технологичния индекс (т.е. от начина на въвеждане на времето, с което се измерва техническия прогрес). Измерва се чрез частните производни на функцията и се получава като сума от еластичностите на производствените фактори, т.е. $RTS = e_K + e_L$.

Транслог спецификацията на производствената функция позволява да се провери наличието както на неутрален (по Хикс), така също на капиталоспестяващ (по Харод) и на трудоспестяващ (По Солоу) технически прогрес. Техническият прогрес е неутрален, когато $\beta_{Kt} = \beta_{Lt} = 0$. При положение, че всички параметри пред променливите с участие на времевия тренд статистически не се различават от нула ($\alpha_t = \beta_{tt} = \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = 0$), може да се приеме, че производството се развива, без да е подвластно на техническите изменения. Производствената функция се трансформира във функция на Коб-Дъглас с неутрален технически прогрес, когато всички параметри β са равни на нула. Когато $\beta_{KK} = \beta_{LL} = -\frac{\beta_{KL}}{2}$, уравнение (37) и (38) се трансформират в предложената от Кмента апроксимация на CES-функцията. Условието за наличие на линейна хомогенност (постоянна възвращаемост от мащаба) са следните:

$$\begin{aligned}\alpha_K + \alpha_L &= 1; \\ \beta_{KK} + \beta_{KL} &= 0; \\ \beta_{KL} + \beta_{LL} &= 0.\end{aligned}$$

С транслог производствената функция могат да се изчисляват еластичности, възвращаемост от мащаба и равнището на техническия прогрес за всеки отрязък от време. Въвеждането на такава значителна степен на гъвкавост често води до получаване на оценки за еластичностите, неотговарящи на обичайните изисквания (т.е. получаване на отрицателни знаци). Когато техният брой е незначителен е прието те да се приравняват на нула или да се възприемат като липсващи значения. Параметричната оценка на общата факторна производителност (Total Factor Productivity или TFP) с двата описани подхода се получава по следния начин:

$$TFP_{TT} = TP_{TT} + (RTS_{TT} - 1)(e_K K + e_L L);$$

$$TFP_{GI} = TP_{GI} + (RTS_{GI} - 1)(e_K K + e_L L).$$

Въпреки фактът, че „трансцедентност” означава индиректно определяне влиянието на всеки производствен фактор чрез оценка на негова функция, транслог моделът се характеризира с по-малко ограничения и по-гъвкава функционална форма в сравнение с функцията на Коб-Дъглас и CES-функцията. Транслог производствената функция е концептуално опростена и при нея не се налага да се правят никакви предварителни предположения, както по отношение на еластичността на замяната между факторите, така и относно възвращаемостта от промяната в мащабите на производството и вида на използваните производствени технологии. Оценка на тези показатели зависят и се обуславят единствено от изследвания емпиричен материал. Транслог моделът предоставя допълнителни предимства, особено когато се изследва влиянието на повече от два фактора.

Обобщавайки гореизложените възможности, с транслог апроксимацията на производствената функция могат да се подложат на проверка различни хипотези относно производствената теория. Изборът измежду възможните модели се осъществява с помощта на правдоподобното отношение (LR test) или критерия на Уолд (Wald test). Критериите следват апроксимативно χ^2 -разпределението със степени на свобода, равни на броя на ограничаваните параметри. Обикновено, на проверка се подлагат следните хипотези:

1. $H_0 : \beta_{Lt} = \beta_{Kt}$ - налице е неутрален технически прогрес по Хикс, изразен с параболичен тренд;

2. $H_0 : \beta_{Lt} = \beta_{Kt} = \beta_{tt}$ - налице е неутрален технически прогрес по Хикс, изразен с линеен тренд;

3. $H_0 : \alpha_t = \beta_{Lt} = \beta_{Kt} = \beta_{tt}$ - производственият процес не се влияе от технологичните промени;

4. $H_0 : \beta_{KK} = \beta_{LL} = -\frac{\beta_{KL}}{2}$ - налице е постоянна еластичност на замяната на факторите, изразена с CES-апроксимацията, предложена от Кмента;

5. $H_0 : \beta_{KK} = \beta_{LL} = \beta_{KL} = \beta_{Lt} = \beta_{Kt} = \beta_{tt}$ - транслог моделът се редуцира до функция на Коб-Дъглас с неутрален технически прогрес.

През 1967 г. Ян Кмента²² предлага вариант, при който нелинейната CES-функция при определени обстоятелства, свързани с величината на параметъра ρ , може да се приведе апроксимативно в линеен вид чрез транслог трансформация. Тази модификация е възможна, когато ρ клони към нула, т.е. еластичността на замяна на двата фактора σ клони към единица:

$$\begin{aligned} \ln Y = \ln A + \gamma \delta (\ln K) + \gamma (1 - \delta) (\ln L) - \frac{1}{2} \gamma \rho \delta (1 - \delta) (\ln K)^2 - \\ - \frac{1}{2} \gamma \rho \delta (1 - \delta) (\ln L)^2 + \gamma \rho \delta (1 - \delta) (\ln K) (\ln L). \end{aligned} \quad (43)$$

Функция (43) се трансформира в транслог функцията:

$$\ln Y = \alpha_0 + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \frac{1}{2} \beta_{KK} (\ln K)^2 + \frac{1}{2} \beta_{LL} (\ln L)^2 + \beta_{LK} \ln L \ln K, \quad (44)$$

където са изпълнени следните условия:

$$\begin{aligned} \alpha_K + \alpha_L = \gamma; \\ \gamma \rho \delta (1 - \delta) = \beta_{KK} = \beta_{LL} = -\frac{\beta_{KL}}{2}. \end{aligned} \quad (45)$$

От уравнение (43) става ясно, че когато $\rho=0$, т.е. $\sigma=1$, транслог функцията се трансформира във функция на Коб-Дъглас. С ограниченията, представени в (45) се проверява дали в действителност транслог функцията е апроксимация на CES-функцията и ако това се потвърждава от данните, впоследствие се изчисляват оценките на параметрите A , γ , ρ и δ .

Транслог трансформацията на CES-производствената функция може да се представи и по следния начин:

$$\ln Y = \alpha_0 + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \beta_{KL} \left(\ln \frac{K}{L} \right)^2, \quad (46)$$

където:

²² Kmenta, J. On Estimation of the CES Production Function. - International Economic Review, 8, 1967, pp.180-189.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \ln A; \\
 \gamma &= \alpha_K + \alpha_L; \\
 \delta &= \frac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L}; \\
 \rho &= \frac{-2\beta_{KL}(\alpha_K + \alpha_L)}{\alpha_K \alpha_L}.
 \end{aligned}$$

(47)

Оценката на параметъра β_{KL} може да се използва като критерий за избор на производствена функция: Коб-Дъгласова или CES. Когато параметърът е статистически незначим, CES функцията се трансформира във функция на Коб-Дъглас. При значим параметър β_{KL} (съществено се различава от нула), CES-функцията е подходящ избор за описване на производствения процес. Но ако значимостта на параметъра се съчетава със значения на ρ , различаващи се съществено от нула, апроксимацията на CES-функцията по Кмента остава некоректна и резултатите не бива да се използват при вземането на управленски решения.

4. Резултати от емпиричното изследване

Като основни източници за необходимите макроикономически показатели са използвани публикации на Националния статистически институт и сайта на Международния валутен фонд (International Financial Statistics Online). Емпиричните оценки на различните производствени функции се осъществяват въз основа на тримесечни данни за брутният вътрешен продукт (Y), бруто капиталобразуването (K) и заетите лица (L) в България за периода от първото тримесечие на 1996 г. до първото тримесечие на 2007 г. Динамичните редове се състоят от 45 наблюдения. Брутният вътрешен продукт по текущи цени, броят на заетите лица и бруто капиталобразуването по текущи цени са набавени от Националния статистически институт. Брутното капиталобразуване е сумата на стойността на инвестициите (бруто образуване на основен капитал) и изменението на запасите. Инвестициите се изразяват в разходите за нето придобиване (придобиване минус предоставяне) на материални и нематериални

дълготрайни нефинансови активи, включително изменението на незавършеното строителство.

За осигуряване на необходимите условия за съпоставимост на динамичните статистически редове, Брутният вътрешен продукт и бруто капиталообразуването са изчислени по цени от 2000 г. Това се извършва чрез дефлирането на номиналните показатели с индекса на потребителските цени при база 2000 г. Последният е взет от сайта на Международния валутен фонд. Всички променливи са стандартизирани чрез дефлирането им със средната аритметична величина. По този начин се редуцира възможността за мултиколинеарност като същевременно променливите в тестваните модели се представят с величини близки до единица. Така се елиминира възможното влияние на мерните единици на първоначалните величини върху оценката на параметрите в иконометричните модели, което е от особено значение при тестването на CES производствената функция. Динамичните редове са анализирани за екстремни равнища (outliers). Освен това за отстраняването на потенциалната лъжлива регресия в резултат на влиянието на сезонния фактор, променливите са коригирани сезонно с X12-ARIMA метода.

Върху получените стандартизирани, сезонно изгладени динамични редове се изпълнява стратегията за тестване на производствените функции от общото към частното. Оценката започва с тестването на производствената функция с променлива замяна на факторите (VES-функция) като обобщение на производствената функция с постоянна замяна на факторите (CES-функция) и функцията на Коб-Дъглас. При отхвърлянето на хипотезата за нейната валидност, на оценка се подлага CES-функцията, която е обобщен вариант на функцията на Коб-Дъглас. При отхвърлянето на валидността на CES-функцията, анализът завършва с тестване на функцията на Коб-Дъглас.

В резултат от включването в транлог модела на квадратите на производствените фактори, както и тяхното съвместно влияние, вероятността от наличие на мултиколинеарност е твърде висока. Това от своя страна може да доведе до неправилни изводи относно статистическата незначимост на оценките на параметрите ако проверката се осъществява с помощта на t-критерия. Поради

тази причина, за предпочитане е акцентът да се постави не върху t-критерия за проверка на отделните параметри, а на проверка да се подложи действителната функционална форма на производствената функция с помощта на критерии, основани на логаритмичната правдоподобна функция - критерий на Уолд (Wald test), правдоподобно отношение (likelihood ratio или LR test) или множител на Лагранж (Lagrange Multiplier или LM test). Тук използваме правдоподобното отношение и критерия на Уолд, които са вградени в иконометричния софтуерен продукт Gretl²³. Гъвкавостта на транслог функцията позволява на проверка с посочените критерии да се подложат серия от взаимно застъпващи и припокриващи се хипотези. Критериите са с апроксимативно χ^2 -разпределение и степени на свобода, равни на броя на тестваните параметри в ограничените модели. Нулевата хипотеза се дефинира като $H_0 : P_{RM} = 0$, а алтернативната съответно $H_1 : P_{RM} > 0$, където P_{RM} са оценките на параметрите в тестваните ограничени модели. Емпиричното значение на LR критерия е равно на минус два пъти разликата между максималните значения на правдоподобната функция, получени с частните случаи (съответните тествани ограничени модели) и обобщената транслог трансформация (неограничен вариант, представен с уравнение 38):

$$LR = \lambda = -2[\text{Ln}L(R) - \text{Ln}L(U)]. \quad (48)$$

С критерия на Уолд се тестват линейни ограничения в модела, като той позволява да се определи степента на апроксимация на оценките в неограничения модел до ограниченията, които са заложили в тестваната нулева хипотеза. Ако наложените ограничения са действителни, неограничените оценки се доближават в максимална степен до тези, получени с ограничения модел. При изчисляването на емпиричните значения на критерия се използват само максимално правдоподобните оценки на неограничения модел.

Резултатите от проверката на функционалната форма на производствената функция са представени в таблица 1.

²³ Всички изчислителни операции в настоящото изследване са извършени с помощта на продукта Gretl 1.7.7 for Windows

Таблица 1

Резултати от проверката на различни функционални форми на производствената функция с правдоподобното отношение и с критерия на Уолд

Моделите*	Нулева хипотеза Степени на свобода (<i>df</i>)	<i>LnL</i>	<i>LR</i>	Уолд	$\chi^2_m(0,05)$	Извод
A		81,80				
B	$H_0 : \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = 0$ <i>df</i> =2	78,53	6,53	5,47	5,99	Приема се
C	$H_0 : \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = \beta_{ut} = 0$ <i>df</i> =3	67,11	29,38	32,23	7,81	Отхвърля се
D	$H_0 : \alpha_t = \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = \beta_{ut} = 0$ <i>df</i> =4	60,55	42,50	55,00	9,49	Отхвърля се
E	$H_0 : \beta_{KK} = \beta_{LL} = -\frac{\beta_{KL}}{2}$ <i>df</i> =2	81,80	-	1,67	5,99	Приема се
F	$H_0 : \beta_{KK} = \beta_{LL} = \beta_{KL} =$ $= \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = \beta_{ut} = 0$ <i>df</i> =6	63,48	36,64	44,02	12,59	Отхвърля се

* Моделите, означени с букви са следните: (A) представлява неограничен транслог модел; (B) – модел с неутрален технически прогрес, представен чрез параболичен временен тренд; (C) – модел с неутрален технически прогрес, представен чрез линеен временен тренд; (D) – модел без технически прогрес; (E) – CES-апроксимация по Кмента; (F) – Коб-Дъглас с неутрален технически прогрес.

На първо място е тествана валидността на производствен процес, изразен чрез транслог модел с неутрален технически прогрес, представен чрез параболичен временен тренд. Хипотезата се приема при равнище на значимост 5% с критерия на Уолд и при равнище 1% с LR критерия.

Втората хипотеза за неутрален технически прогрес, представен чрез линеен временен тренд се отхвърля и от двата критерия. Изводът се потвърждава както при равнище на значимост 5%, така и при еднопроцентно равнище за α -грешка. По аналогичен начин се отхвърлят модела без технически прогрес (D) и Коб-Дъгласовата функция с неутрален технически прогрес (F).

Хипотезата за валидност на CES-производствената функция, представена с апроксимацията на Кмента (E), е тествана с критерия на Уолд. Установява се, че тя е валидна както при 5%-но равнище, така и при равнище на значимост 1%.

Основният извод от проведената проверка на серията от хипотези е, че производственият модел, изхождайки от емпиричните данни, може да се опише адекватно с помощта на транслог функцията с включен параболичен временен

тренд или с CES-производствената функция, представен чрез транслог апроксимацията по Кмента. Но преди да се интерпретират резултатите е необходимо да се провери за хетероскедастичност и серийна корелация в остатъчните елементи на тестваните модели. Проверката за автокорелация е направена с критерия на Дърбин-Уотсън (DW) и автокорелационния коефициент от първи порядък (r_1), а постоянната вариация в остатъчните елементи е тествана с критерия на Уайт и критерия на Глейзер. Резултатите са представени в таблица 2.

Таблица 2

Проверка за наличие на автокорелация и хетероскедастичност в остатъчните елементи на тестваните модели, получени с метода на най-малките квадрати

Модели	DW	r_1	Уайт (df) ^a	Глейзер (df)
A	1,5432 нт ^б	0,1845	15,7696 (15)	16,782 (9)*
B	1,3968 нт	0,2230**	18,0170 (11)*	21,303 (7)***
C	0,6897*** ^в	0,5067***	33,6080 (12)***	23,442 (6)***
D	0,8159***	0,4833***	24,6695 (10)***	21,973 (5)***
F	0,5383***	0,5618***	25,7078 (6)***	21,451 (3)***

^a При оценката на критерия са използвани само квадратите на обясняващите променливи.

^б Неубедителен тест – значението на критерия попада в областта на неопределеност.

^в На три звезди съответства наличие на автокорелация, съответно на хетероскедастичност в остатъчните елементи при равнището на значимост 1%, на две звезди – при равнище на значимост 5 %, на една звезда – при равнище на значимост 10%.

От резултатите, представени в таблица 2 става ясно, че изискванията за отсъствие на автокорелация и постоянна дисперсия в остатъчните елементи са изпълнени само в общия транслог модел. За правилна интерпретация на останалите модели е необходимо да се отстрани автокорелацията и хетероскедастичността. Това е направено чрез удобния обобщен метод на най-малките квадрати (FGLS), при който се използва корекцията на Прайс-Уинстън. С цел потвърждаване на изводите, относно валидността на тестваните модели, основани на обикновения метод на най-малките квадрати, серията от хипотези е повторена отново, като този път моделите са оценени с FGLS-метода. Резултатите са представени в таблица 3.

Таблица 3

Резултати от проверката на различни функционални форми на производствената функция с правдоподобното отношение
(с използване на FGLS метода)

Модели ^a	Нулева хипотеза Степени на свобода (<i>df</i>)	<i>LR</i>	$\chi_m^2(0,05)$	Извод
B	$H_0 : \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = 0$ <i>df</i> =2	2,93	5,99	Приема се
C	$H_0 : \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = \beta_{ut} = 0$ <i>df</i> =3	12,53	7,81	Отхвърля се
D	$H_0 : \alpha_t = \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = \beta_{ut} = 0$ <i>df</i> =4	25,99	9,49	Отхвърля се
E	$H_0 : \beta_{KK} = \beta_{LL} = -\frac{\beta_{KL}}{2}$ <i>df</i> =2	0,1349 ^b	3,27	Приема се
F	$H_0 : \beta_{KK} = \beta_{LL} = \beta_{KL} =$ $= \beta_{Kt} = \beta_{Lt} = \beta_{ut} = 0$ <i>df</i> =6	17,41	12,59	Отхвърля се

^a Моделите, означени с букви са следните: (A) представлява неограничен транслог модел; (B) – модел с неутрален технически прогрес, представен чрез параболичен временен тренд; (C) – модел с неутрален технически прогрес, представен чрез линеен временен тренд; (D) – модел без технически прогрес; (E) – CES-апроксимация по Кмента; (F) – Коб-Дъглас с неутрален технически прогрес.

^b Оценката за валидността на CES-функцията е направена с F-критерия при степени на свобода (2,35).

След тестването на поредицата от хипотези, с прилагането на FGLS метода отново установяваме, че производственият процес би могъл адекватно да се опише чрез транслог модела с включен параболичен тренд и с CES-апроксимацията по Кмента. Затова следващият етап от настоящото изследване е да подложим на оценка тези функции, като започнем тестването с по-общата от двете – функцията, представена с модел B. Заедно с тях е апробиран и общият транслог модел. Резултатите от оценките на трите модела (общият и модел E, оценени с обикновения метод на най-малките квадрати и B, оценен с FGLS метода) са представени в таблица 4. Въпреки адекватността на моделите, статистически значими в трите модела са параметрите, свързани с временния тренд, което потвърждава необходимостта от отчитане влиянието на неутралния технически прогрес. Освен това, статистически значими са още свободният член и параметърът α_K в общия модел и в модела с параболичен тренд, както и β_{KK} в

общия модел. Понеже оценките на параметрите не могат да се интерпретират директно, се изчисляват еластичностите на производството по отношение на труда и капитала, възвращаемостта от мащаба и равнището на технологичните изменения (техническият прогрес). Осреднените значения на тези показатели през изследвания период са представени в таблица 5.

Таблица 4

Оценка на параметрите в модели А, В и Е

Параметри	Неограничен модел (А)	Ограничен модел (В)	Ограничен модел (Е)
α_0	0,3842 (2,322)	0,0323 (0,292)	0,3484 (2,181)
α_K	0,3380 (2,195)	0,0300 (0,504)	0,3354 (2,189)
α_L	0,2747 (0,211)	-0,4684 (-0,838)	-1,0222 (-1,417)
β_{KK}	0,1068 (1,727)	-0,032 (-0,943)	0,0334 (1,254)
β_{LL}	-8,6435 (-0,905)	0,6737 (0,063)	0,0334 (1,254)
β_{KL}	1,8473 (1,240)	-0,4252 (-0,569)	-0,0668 (-1,254)
β_{Kt}	-0,0098 (-1,239)		-0,0120 (-1,584)
β_{Lt}	-0,0731 (-1,244)		-0,0052 (-0,214)
α_t	-0,0465 (-3,068)	-0,0161 (-1,779)	-0,0446 (-2,981)
β_{tt}	0,0022 (3,350)	0,0010 (2,926)	0,0022 (3,352)
R^2	0,917	0,926	
Ст. грешка на модела	0,0446	0,0411	0,0444
F-критерий	42,712	16,423	
DW	1,5423	1,765	
r_1	0,1845	0,049	

В скобите са представени значенията на t-критерия за статистическата значимост на оценяваните параметри. Модел А и модел Е са оценени с обикновения метод на най-малките квадрати, а параметрите модел В са получени с удобния обобщен метод на най-малките квадрати (метод на Прайс-Уинстън)

Таблица 5

Осреднени оценки на факторните еластичности, възвращаемостта от мащаба и техническия прогрес в модели А, В и Е

Параметри	Неограничен модел (А)	Ограничен модел (В)	Ограничен модел (Е)
Факторни еластичности			
Капитал	0,0945	0,0354	0,0540
Труд	-1,7048	-0,3993	-1,1307
Възвращаемост от мащаба	-1,6103	-0,3639	-1,0767
Технически прогрес	0,0057	0,0069	0,0080

От бързия преглед на резултатите, поместени в таблица 5, става ясно, че поради наличието на мултиколинеарност в тестваните модели, еластичността на труда, както и възвращаемостта от промяната в мащаба на производството са с отрицателни знаци. Факт, който противоречи на икономическа теория. За елиминиране на мултиколинеарността е приложена ридж регресията. Въпреки многобройните опити с различните значения на ридж параметъра, резултатите остават неприемливи. Следователно, достоверността на променлива еластичност на замяната между факторите не може да бъде потвърдена с помощта на транслог трансформацията. Неубедителен е и тестът на CES-функцията с технически прогрес, различен от неутралния.

Тестването на CES-функцията с неутрален технически прогрес представлява следващия етап от настоящото изследване. За целта се използва следният модел:

$$\ln Y = \alpha_0 + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \beta_{KL} \left(\ln \frac{K}{L} \right)^2 + \alpha_t t. \quad (49)$$

След оценката на модела с метода на най-малките квадрати се установи наличие на автокорелация и хетероскедастичност в остатъчните елементи. За правилната интерпретация на модела и включените в него параметри отново се налага да бъде използван удобният обобщен метод на най-малките квадрати. По аналогия с общия транслог модел, тук също е възможна проверка на серия от нулеви хипотези, свързани с различните теории за производството. Тествани са следните хипотези:

1. Производственият процес се описва чрез CES-апроксимацията на Кмента, без технически прогрес (ТП). Нулевата хипотеза се дефинира като $H_0 : \alpha_t = 0$.

2. Производственият процес се описва с функцията на Коб-Дъглас с неутрален технически прогрес (НТП). На проверка се подлага нулевата хипотеза $H_0 : \beta_{KL} = 0$.

3. Производственият процес се описва с функцията на Коб-Дъглас без отчитане влиянието на техническия прогрес. Нулевата хипотеза се дефинира по следния начин: $H_0 : \alpha_t = \beta_{KL} = 0$.

Таблица 6 отразява резултатите от тестваните с максималното правдоподобното отношение хипотези:

Таблица 6

Резултати от проверката на валидността на CES-производствената функция и функцията на Коб-Дъглас с правдоподобното отношение (с използване на FGLS метода)

Параметри	CES-функция, НТП	CES-функция, без ТП $H_0 : \alpha_t = 0$	Коб-Дъглас, НТП $H_0 : \beta_{KL} = 0$	Коб-Дъглас, Без ТП $H_0 : \alpha_t = \beta_{KL} = 0$
α_0	-0,1262 (-2,243)	0,0597 (0,633)	-0,0774 (1,980)	0,0430 (0,731)
α_K	0,0161 (0,317)	0,0273 (0,6568)	0,0785 (6,184)	0,0772 (7,198)
α_L	0,7282 (2,215)	0,5757 (1,205)	0,6008 (1,935)	0,4767 (1,081)
β_{KL}	-0,0144 (-1,246)	-0,0114 (-1,224)		
α_t	0,0061 (2,755)		0,0041 (2,809)	
LR		7,592	1,552	9,172
$\chi^2(0,05)$		3,84	3,84	5,99
Извод		Отхвърля се	Приема се	Отхвърля се
R^2	0,913	0,914	0,910	0,913
Ст. грешка на модела	0,0438	0,0419	0,0442	0,0421
F-критерий	18,534	18,748	24,433	27,053
DW	1,4560	1,7783	1,4691	1,791
r_1	0,1383	0,1069	0,1305	0,0919

В скобите са представени значенията на t-критерия за статистическата значимост на оценяваните параметри.

Всеки един от тестваните модели е статистически значим, с хомоскедастичност и отсъствие на автокорелация в остатъчните елементи. С правдоподобното отношение се установява, че емпиричните данни би следвало да се опишат най-добре чрез функцията на Коб-Дъглас с неутрален технически прогрес. Този извод се потвърждава и от статистическата значимост параметрите, оценена с t-критерия. Параметърът пред капитала и свободният член са значими при $\alpha = 0,10$, а параметрите пред труда и тренда – при $\alpha = 0,01$. Като потвърждение за отхвърляне валидността на двете функции без технически прогрес (CES и Коб-Дъглас) може да се използва статистическата незначимост на оценките на включените в тях параметри. Въпреки статистическата незначимост на параметъра β_{KL} в CES-функцията с включен технически прогрес (което е още едно доказателство в подкрепата на извода, че от двете функции по-подходяща е Коб-Дъгласовата функция), с илюстративно-разяснителна цел изчисляваме параметрите на CES-функцията по така получените с CES-апроксимацията по Кмента оценки. Това се осъществява чрез формулите, представени в (47):

$$\begin{aligned}
 A &= \text{antilog } \alpha_0 = 0,8815; \\
 \gamma &= \alpha_K + \alpha_L = 0,0161 + 0,7282 = 0,7443; \\
 \delta &= \frac{\alpha_K}{\alpha_K + \alpha_L} = \frac{0,0161}{0,7443} = 0,0202; \\
 \rho &= \frac{-2\beta_{KL}(\alpha_K + \alpha_L)}{\alpha_K \alpha_L} = \frac{-2 \cdot (-0,0144)(0,7443)}{0,0161 \cdot 0,7282} = \frac{0,0214}{0,0117} = 1,8319.
 \end{aligned}$$

Съгласно изчислените оценки, степента на замяната между двата фактора (ρ) е 1,8319. Вземайки предвид факта, че транслог трансформацията на CES-функцията е адекватна апроксимация до нелинейната CES-функцията само когато ρ клони към нула, можем да направим генералното заключение, че в настоящото изследване апроксимацията на Кмента е некоректна и получените с нея резултати не могат да се интерпретират подобаващо. Оттук следва, че зависимостта на brutния вътрешен продукт от brutното капиталобразуване и броя на заетите лица в България през изследвания период може да се опише с

помощта на функцията на Коб-Дъглас, отчитаща влиянието на неутралния технически прогрес.

Установява се, че с нарастване на капитала (в случая брутното капиталообразуване) с един процент, Брутният вътрешен продукт на България се увеличава за едно тримесечие с 0,0785% или за година с 0,314%. В същото време, влиянието на заетите лица върху производството е доста по-силно. На 1% увеличение в броя на заетите лица съответства увеличение в БВП с 0,6008% за тримесечие, което за година се равнява на 2,4% увеличение. Сумата на параметрите α и β е 0,6793, което е индикатор за намаляваща ефективност от изменението в мащабите на производството. При това влиянието на производствените фактори върху Брутният вътрешен продукт е екстензивно, като растежа на производството е свързан с нарастването на броя на заетите лица, с капиталообразуването и развитието на технологиите, а не с нарастването на общата факторна производителност. Влиянието на неутралния технически прогрес се идентифицира с параметъра пред линейния тренд. Установява се, че в резултат на промените от организационно-технологичен характер, БВП през изследвания период е нараствал с 0,41% на тримесечие, което означава годишен ръст от 1,64%.

За да завършим с анализа на агрегираната производствена функция можем да тестваме хипотезата за линейна хомогенност, т.е. за възвращаемост от мащаба, равна на единица. Това отново се извършва с базираня на критерия на Уолд F-критерий като се тества линейното ограничение $H_0: \alpha_K + \alpha_L = 1$. Линейната хомогенност се потвърждава от емпиричното значение $F(1,41) = 1,0659$, с което се приема нулевата хипотеза при равнище на значимост 1%. След оценка на модела, представен в уравнение (14) и FGLS метода за отстраняване на автокорелацията се получиха следните резултати:

Таблица 7

Резултати от оценката на функцията на Коб-Дъглас при линейна хомогенност
(с използване на FGLS метода)

Параметри	Коефициент	Стандартна грешка	t-критерий	p-value
α_0	-0,0683	0,0445	-1,535	0,1322
α_K	0,0780	0,0121	6,425	0,0000
α_L	0,0037	0,0016	2,246	0,0301
R^2		0,914		
Ст. грешка на модела		0,0434		
F-критерий		30,4628		
DW		1,5501		
r_1		0,1329		

Моделът е адекватен, с отсъствие на автокорелация и хетероскедастичност в остатъчните елементи. Статистически значими са параметърът пред временния тренд и еластичността на производството по отношение на капитала. Дори при изпълнение на презумпцията за линейна хомогенност на производствения процес, участието на капитала във формирането на brutния вътрешен продукт остава незначително като запазва еластичността си от 0,078%. Оказва се, че за осигуряването на постоянната възвращаемост от промените в мащабите на производството, основен принос има труда. Увеличението на броя на заетите лица с един процент води до нарастване на brutния вътрешен продукт с около 0,92%. Влиянието на техническия прогрес отново се оказва статистически значимо, но е по-слабо изразено. В резултат от влиянието на технико-технологичните изменения, БВП нараства с 0,37% за тримесечие или годишният темп на прираста е 1,48%.

5. Основни изводи

В студията, въз основа на макроикономически показатели за България, с помощта на трансцедентната логаритмична (транслог) апроксимация на оценка са подложени параметрите на три вида производствени функции - производствената функция с променлива еластичност на замяна на факторите

(VES-функция), производствена функция с постоянна еластичност на замяна на факторите (CES-функция) и функция на Коб-Дъглас. Използвана е гъвкавостта на транслог апроксимацията, която позволява успешното реализиране на стратегията „от общото към частното”, при която се започва с тестването на производствената функция с променлива замяна на факторите (VES-функция) като обобщение на производствената функция с постоянна замяна на факторите (CES-функция) и функцията на Коб-Дъглас. При отхвърлянето на хипотезата за нейната валидност, на оценка се подлага CES-функцията, която е обобщен вариант на функцията на Коб-Дъглас. При отхвърлянето на валидността на CES-функцията, анализът завършва с тестване на функцията на Коб-Дъглас. Освен тестване на различните теории за еластичността на замяната между производствените фактори с помощта на LR критерия и критерия на Уолд на проверка бяха подложени серия от хипотези относно необходимостта от включване техническия прогрес (неутрален и различен от неутралния), както и такива, свързани с проверка на ефекта от промените в мащаба на производството.

Въпреки, че моделирането на макроикономически производствени функции е свързано с изпълнението на доста строги изисквания²⁴, от практическа (рационална) гледна точка е достатъчно да се определи дали производствената функция осигурява адекватна апроксимация на действителността, характеризирани със съответни емпирични данни. Когато с производствените функции се генерират полезни резултати, използването им в емпиричните изследвания логично се приема за оправдано²⁵. В тази връзка основните резултати от настоящото изследване могат да се обобщат по следния начин:

1. Емпиричните данни за България в изследвания период не потвърждават валидността на VES-функцията, независимо дали в нея се включва техническия

²⁴ Обстоен преглед на изискванията, които трябва да се спазват при анализ с агрегирани производствени функции е направен в Fisher, F. The Existence of Agregate Production Functions. – *Econometrica*, October 1969, pp. 553-577.

²⁵ Chen, E. Chen, E. Economies of Scale and Capital-Labour Substitution in Hong Kong Manufacturing. – *Hong Kong Economic Papers*, No. 11, April 1977, p. 44.

прогрес или е изпълнена презумпцията за постоянен ефект от промяната в мащаба.

2. Неприемливи са резултатите и от използването на транслог апроксимацията за оценка на CES-функцията. Установи се, че степента на замяната между двата фактора е над единица – съответно 1,8319, а за да е възможна интерпретацията на резултатите, получени с транслог апроксимацията по Кмента, тази замяна трябва да клони към нула. С други думи, с транслог апроксимацията не може да се потвърди валидността на теорията за постоянна еластичност на замяна на факторите, различна от единица.

3. С отчитане на влиянието на техническия прогрес (неутрален по Хикс), зависимостта на БВП от труда и капитала се описва адекватно с функцията на Коб-Дъглас. От оценката на параметрите с удобния обобщен метод на най-малките квадрати (корекция на Прайс-Уинстън), се установи, че еластичността на производството по отношение на капитала е 0,08, а еластичността на труда е 0,60. Брутният вътрешен продукт е доста по-еластичен по отношение на заетите лица, отколкото спрямо брутното образуване на основен капитал. Неутралният технически прогрес е основен фактор за съвкупното производство. В резултат от неговото влияние, Брутният вътрешен продукт на България през изследвания период нараства за тримесечие средно с 0,41% или годишно – с 1,64%.

4. Емпиричните данни доказват изпълнението на презумпцията за линейна хомогенност. Установи се, че през обхванатия в изследването период в България е налице постоянна ефективност по отношение промените в мащаба на производството, т.е. равнището на ефективност не зависи от мащабите на производството. Основен принос за тази хомогенност има влиянието на броя на заетите лица. Увеличаването им с един процент определя увеличение в БВП, равняващо се на 0,92%.

Редно е да се отбележи, че върху икономическия растеж и в частност върху БВП освен труда, капитала и техническия прогрес, влияние оказват и други производствени фактори, определяни в литературата с термините „обща факторна производителност” или „остатъчен фактор”. Тук се отнасят комбинацията между труд и капитал, повишаването на качеството на човешкия

капитал, подобренията в инфраструктурата и макроикономическата среда, рационализирането на секторните, отрасловите и продуктовете структури, регулирането на стопанската дейност, развитието на конкуренцията, отвореността за чуждестранни и инвестиции и много други. От проведеното изследване установяваме, че прогнозните съотношения на производствените фактори в прираста на БВП в разработената от екип учени Стратегия за догонващо икономическо развитие²⁶ са напълно реалистични. През изследвания в настоящата разработка период участието на труда, капитала и общата факторна производителност се оценява съответно на 8%, 60% и 32% при положение, че в модела се отчита влиянието на неутралния технически прогрес по Хикс. В Стратегията при сценарий за 5,5% средногодишен темп на прираста на БВП се очаква, че през 2010 г. 17% от този прираст ще бъде осигурен от физическия капитал, 65% - от труда и 18% - от общата факторна производителност. Тези прогнозни величини са доста близки до получените резултати в настоящото изследване. Това ни дава основание да вярваме, че заложените в стратегията прогнозни съотношения между производствените фактори (35% за труда, 20% за капитала и 45% за общата факторна производителност) през 2020 г. също са постижими. Естествено, това е възможно за сметка намалението на дела на труда (броя на заетите лица) и нарастващата, макар и с бавни темпове, роля на физическия капитал.

²⁶ Ангелов, И. и др. Икономиката на България и Европейския съюз: стратегия за догонващо икономическо развитие до 2020 година. С., ИИ на БАН, 2003. На разположение в <http://www.iki.bas.bg/english/CVita/angelov/prognosis2020/001Contents.htm#top>.