

ПРИЛОЖНИ АСПЕКТИ НА ИКОНОМЕТРИЧНОТО МОДЕЛИРАНЕ НА ДИНАМИЧНИ ЗАВИСИМОСТИ

Доц. д-р Любомир Иванов
Евгени Овчинников¹

Резюме

Разработката е фокусирана върху приложението на статистическите методи за анализ на динамични зависимости. Тезата е, че статистическите методи за анализ на динамични зависимости са модерни и мощни инструменти, които позволяват да се разкрият нови характеристики на взаимодействията между явленията и процесите в областта на икономиката, но приложението им е съпроводено с редица условия, което налага да се познават техните предпоставки и ограничения.

Целта на материала е да се систематизират статистическите методи за анализ на зависимости на основата на динамични редове, като се характеризират техните възможности за разширяване и задълбочаване на анализа. За постигането на целта се поставят следните задачи: а) да се характеризира кроскорелационният анализ; б) да се даде характеристика на моделите на разпределени лагове; в) да се характеризират моделите на векторната авторегресия; г) да се даде характеристика на коинтеграцията.

Като резултат са изведени и систематизирани характеристиките на методите за анализ на динамични зависимости, които позволяват да се установи взаимната обвързаност между два динамични реда, да се изследват единични и множествени зависимости и тяхното разпределено влияние, да се анализират както дългосрочни равновесни зависимости, така и взаимодействието между променливите в краткосрочен аспект, характеризиращо отклоненията от равновесното състояние.

Ключови думи: динамична зависимост, коинтеграция, векторна авторегресия, кроскорелация, разпределени лагове.

JEL: C22, C32.

¹ Участието на авторите в написването на материала е, както следва: доц. д-р Л. Иванов – въведение, заключение, т. 1.1; Евгени Овчинников – т. 1.2, т. 1.3, т. 2.1 и т. 2.2.

APPLICABLE ASPECTS OF ECONOMETRIC MODELING OF DYNAMIC RELATIONS

Assoc. Prof. Lyubomir Ivanov, PhD
Evgeni Ovchinnikov

Abstract

The paper is focused on the application of the statistical methods for the analysis of dynamic relationships. The relationships among the economic phenomena are realized not only in the distributions of the population, (static aspect) but also in the changes that have occurred into it with the time (dynamic aspect).

The thesis supported by the authors is that statistical methods used for the analysis of dynamic relationships are both modern and powerful instruments for the researchers that allow to discover new characteristics of the interdependence among economic phenomenon but at the same time, their application is accompanied with many conditions that have to be known and taken into account.

The goal of the paper is to systematize the statistical methods for analysis of relationships based on time series data, and to point out their abilities in the advancement and enhancement of the analysis of the economic phenomenon. In order to achieve this goal, we have solved the following tasks: a) to describe the cross-correlation analysis; b) to characterize the distributed lag models (aka transfer function models); c) to study the vector auto regression (VAR) models; d) to describe the cointegration as advanced statistical method for the analysis of non-stationary time series.

The established results cover the advanced features of the dynamic relationship models: the interdependence between two (or more) time series; exploration of single relationships and distributed influence; the representation of multidimensional dynamic relationship; the survey of both long-term equilibrium relation and short-term interaction between the variables induced by the deviations from equilibrium state.

Keywords: dynamic relationship, cointegration, vector autoregression, crosscorrelation, distributed lags

JEL: C22, C32.

Увод

Статистико-иконометричното моделиране е основен инструмент за решаването на задачите на статистическия анализ на динамични зависимости. Моделите за анализ на динамични зависимости принадлежат към класа регресионни модели, които се прилагат при класическия анализ на зависимости. Едновременно с това чрез тях следва да могат да се решат и допълнителните задачи, присъщи на изследванията в динамичен аспект на

връзките между социално-икономическите явления. Това обстоятелство неминуемо налага необходимостта да се открият специфичните характеристики на моделите за анализ на динамични зависимости.

От формална гледна точка моделите за анализ на зависимости в динамичен аспект се отличават от тези в статичен аспект в следните направления:

- **Първо**, при построяването на моделите на зависимостта трябва да се дължи сметка за *инерционността*, присъща на икономическите явления и процеси, т.е. размерът на изучаваното явление-резултат в текущия период зависи от миналото му – от размера на явлението през предходните периоди. Това изисква, за да се извърши коректна спецификация на моделите, в тях да се включват лагове на зависимата променлива.
- **Второ**, при формулирането на теоретичните съотношения между изучаваните явления следва да се отчита *синхронизацията* между явленията, т.е. възможността размерът на явлението–следствие през текущия период да се определя от размера на явлението–фактор не само през текущия, но и през редица предходни периоди. На тази основа е необходимо, в модела на динамичната зависимост да се включат лагове на независимите променливи.
- **Трето**, при специфицирането на вероятностното разпределение на случайния компонент в модела на динамичната зависимост следва да се отчита, че той се проявява като стохастичен процес, т.е. като подредена във времето последователност от случайни величини. Тези случайни величини може да отговарят на условията за стационарност и ергодичност, но може и да притежават *различни вероятностни разпределения*. Поради това в моделите на динамични зависимости често се налага да се използват допълнителни уравнения, моделиращи по определен начин променящите се характеристики на случайния компонент: специфична автоковариационна структура, налагаща да се включват компоненти на плъзгащи се средни (*MA*); различия във вариацията на случайните компоненти, обуславящи уравнения на дисперсията във вида на модели с условна хетероскедастичност (*ARCH, GARCH, EGARCH, TAR*).
- **Четвърто**, динамиката във времето носи възможност за пълна *промяна в характера на зависимостта* или за частична промяна в някои от аспектите ѝ. Поради това параметрите на моделите, характеризиращи основните закономерни съотношения, пропорции или силата на факторното влияние, невинаги остават константи за целия изследван период, а могат да се променят в определени граници. Това налага, в моделите на динамични зависимости да се включват уравнения на отделните параметри (*time-varying parameters*) или

фиктивни променливи, представящи резките промени в основни характеристики на зависимостта (*structural breaks*).

За целите на настоящото изследване приемаме следната класификация на моделите за анализ на динамични зависимости, съобразно наличието на тенденция в динамичните редове на анализирани показатели:

- модели въз основа на **стационарни динамични редове**;
- модели въз основа на **нестационарни динамични редове**.

Подобно разграничение се основава на множеството теоретични, методологични и емпирични изследвания в научната литература относно проблемите, които нестационарността поражда при статистическия анализ на динамични зависимости, в т.ч. *погрешна спецификация* на модела на зависимостта, *некоректно оценяване* на параметрите на моделите (оценките стават изместени, неефективни и несъстоятелни), установяване на зависимости, които не съществуват в социално-икономическата действителност (*фалшиви зависимости*), и в крайна сметка *неправилни изводи и заключения* поради опорочаването на базовите предпоставки, залегнали при извеждането на методите и моделите на статистическия анализ на зависимости.

1. Моделиране на динамични зависимости при стационарни редове

Статистическият анализ на динамични зависимости, който има за непосредствен резултат построяването на конкретните модели, се предхожда от изследване на статистическите свойства и емпиричните закономерности в динамичните редове. Този първи етап от изследването, често наричан предварителен анализ, протича в две направления – анализ на развитието на динамичните редове и кроскорелационен анализ. Самостоятелното изследване на динамичните редове цели както да се разкрият вътрешно присъщите им закономерности (автокорелацията и кроскорелация), така и да се определи характерът на тенденцията (нестационарността). Чрез кроскорелационния анализ може да се направи предварителна оценка на лаговата структура на зависимостта.

1.1. Корелация във времето

Зависимостите между икономическите показатели са сложни както по своята форма, така и по отношение на времето си разпределение. Промените във фактора предизвикват промени в резултативния показател, но измененията настъпват с известно закъснение във времето. Определянето на времето на реакция на резултата е една от задачите при анализа на динамичните зависимости, заедно с установяването на силата на зависимостта и нейната форма. Построяването на адекватен модел следователно е

по-сложно при динамичните зависимости, в сравнение с класическите зависимости, тъй като забавянето (закъснението или лага) може да не е предварително известно.

За да се определи най-подходящият модел като посока на връзката и оптимално изоставане, се налага да се използват средствата на *кроскорелационния анализ*. Основната му задача е идентификация на силата на динамичната зависимост във времето, а допълнителните задачи са установяване на синхронизацията и установяване посоката на обусловеността.

Нека разполагаме с два показателя: y_t и x_t , които са регистрирани на равни интервали време и за един и същ период:

$$y_t : y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

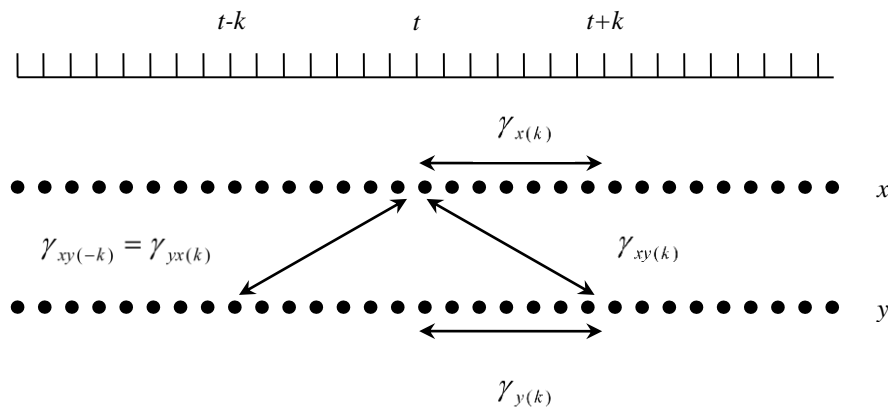
$$x_t : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Разгледани като свързана система, при двата показателя се появява допълнителна характеристика, наречена *кросковариационна функция*. Тя измерва ковариацията на показателите. Означава се като:

$$\gamma_{xy(k)} = E[(x_t - \mu_x)(y_{t+k} - \mu_y)] = E[(x_{t-k} - \mu_x)(y_t - \mu_y)],$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

където: k е изоставането (лагът) на показателя y спрямо показателя x .

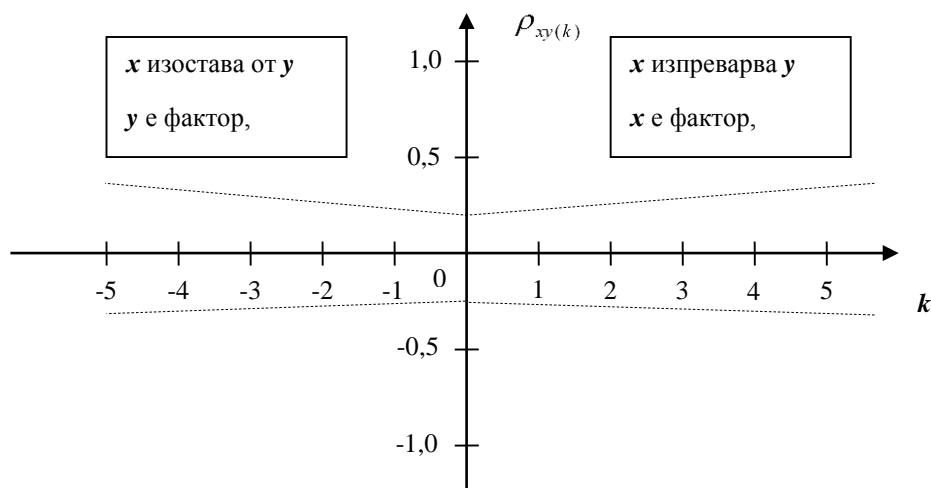


Фигура 1. Кросковариация между два показателя

Ковариацията на двата показателя е именована величина, която зависи от мащаба на измерването. За по-лесна интерпретация се използва *кроскорелационната функция*, която се движи в интервала от -1 до +1. За целта кросковариационната функция се разделя на произведението от стандартните отклонения на двата показателя:

$$\rho_{xy(k)} = \frac{\gamma_{xy(k)}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Изчисляването на кроскорелационната функция дава възможност да се определят изоставането на реакцията на резултата спрямо фактора, както и посоката на зависимостта. За удобство при анализа се използва графично изображение, наречено *кроскорелограма*. На абсцисната ос се нанасят стойностите на изоставането k , а по ординатата ос се нанасят стойностите на кроскорелационните коефициенти $\rho_{xy(k)}$.



Фигура 2. Кроскорелограма

При интерпретацията на корелограмата и стойностите на кроскорелационните коефициенти трябва да се имат предвид следните положения:

- когато най-високите стойности се достигат при изоставане на показателя y , той се разглежда като резултат, а показателят x се разглежда като фактор;
- когато най-високи стойности на кроскорелационните коефициенти се достигат при изоставане на показателя x , то y се интерпретира като фактор, а x се разглежда като резултат;
- когато се търси точното изоставане, се взема този лаг, при който кроскорелационните коефициенти имат най-висока стойност.

Резултатите от кроскорелационния анализ представляват база за построяване на моделите на динамични зависимости при стационарните редове.

1.2. Единични модели на динамични зависимости при стационарни редове

Основният проблем при статистическия анализ на зависимости въз основа на динамични редове се състои в разграничението на редовете по отношение на свойството стационарност. Конвенционалните методи за анализ на динамични зависимости се основават на допускането за стационарност на динамичните редове, които участват в изследваната връзка. Инерционната природа на социално-икономическите явления е предпоставка, динамичните редове, които ги описват, да са нестационарни.

Стационарност в тесен смисъл означава, че динамичният ред се характеризира чрез постоянни, независещи от времето, *математическо очакване, дисперсия и автоковариация*. Стационарните редове са интегрирани от нулев порядък – $I(0)$. Динамичен ред, интегриран от порядък $d - I(d)$ е такъв ред, който се свежда до стационарен чрез филтриране с последователни разлики d пъти. Когато едно от условията за стационарност е нарушено, динамичният ред е *нестационарен*.

От предложената дефиниция за стационарност произтичат следните специфични характеристики на стационарните и нестационарните динамични редове. **Първо**, за стационарните динамични редове е присъщо съществуването на вътрешно равновесие, което се характеризира от средната му величина. Динамичният ред се колебае около нея, като очакваната продължителност от време между преминаванията на реда през средната му стойност е крайна величина. За нестационарните редове не могат да се оценят средната величина и дисперсията и, следователно, за тези редове не е присъщо вътрешно равновесие. Дисперсията на нестационарните редове клони към безкрайност при безкрайно увеличение на времето (Box & Jenkins, 1970). **Второ**, автокорелационните коефициенти, оценени въз основа на стационарни редове, намаляват и клонят към нула при увеличаване на лаговия порядък, т.е. текущото значение на реда е слабо повлияно от далечни предходни значения. Автокорелационните коефициенти, оценени въз основа на нестационарни редове, са статистически значими дори при дълги отмествания във времето. На тази основа в научната литература е възприето схващането, че стационарните редове са с крайна (къса) памет, а нестационарните редове – с безкрайна (дълга) памет. Разграничението между редове с крайна и безкрайна памет се основава на продължителността и разпределението на ефекта от даден шок върху бъдещото развитие на динамичния ред. При стационарните редове ефектът е временен и изчезва с течение на времето. При нестационарните редове ефектът е постоянен, тъй като текущото значение на ред с безкрайна памет е кумулирана сума от всички предходни шокове (иновации) (Hatanaka, 1996).

Нестационарност. Инерционната природа на социално-икономическите явления е предпоставка за наличие на тенденция в развитието им. Тя се формира в резултат от действието на систематични фактори, които

действат през целия изследван период и наличието ѝ предполага нарушаване на изискването за стационарност в динамичните редове. От съществено значение за анализа на динамични зависимости е установяването на характера на тенденцията в развитието на динамичните редове. В научната литература съществуват два подхода за моделиране на тенденцията в зависимост от това, дали тя е с детерминистичен или стохастичен характер (Nelson & Plosser, 1982).

Тенденция с **детерминистичен характер** е налице, когато развитието на динамичния ред може да се представи чрез:

$$y_t = d_t + c_t,$$

където: d_t е детерминистичен тренд, представен като функция на времето, а c_t е стационарен компонент, съдържащ информация за цикличните, сезонните и случайните компоненти в развитието на реда.

Такъв тип нестационарни динамични редове се наричат стационарни около тренд (тренд-стационарни). Характерно за тях е, че те могат да се сведат до стационарни след премахване на детерминистичната функция на времето.

Тенденция със **стохастичен характер** е налице, когато развитието на динамичния ред може да се представи чрез:

$$y_t = d_t + s_t + c_t,$$

където: s_t е стохастичен тренд, който е интегриран от ненулев порядък процес.

Такъв тип нестационарни динамични редове се наричат разликово-стационарни. Характерно за тях е, че те могат да се сведат до стационарни след филтриране посредством последователни разлики.

Разграничаването (идентифицирането) на характера на тенденцията в развитието на динамичните редове намира проявление в следните направления:

Първо, наличието на детерминистичен тренд в динамичния ред предполага съществуването на дългосрочна равновесна крива, към която явлението се стреми, след временни отклонения от нея. Тази крива е детерминистичната функция на времето, с която е описано развитието на динамичния ред. При условие че за реда е присъщ и стохастичен тренд, детерминистичният тренд не може да бъде равновесно състояние за развитието на явлението.

Второ, моделите за описване на тенденцията в развитието на динамичен ред чрез детерминистичен тренд са грешно специфицирани, ако за динамичния ред е присъщ стохастичен тренд. Грешките при прогнозите въз основа на модели с детерминистичен тренд са определени дори и при безкраен прогнозен хоризонт. Грешките при прогнозите, ако не е отчетено наличието на стохастичен тренд, са неопределени с увеличаване на прогнозния хоризонт.

Трето, при статистическия анализ на динамични зависимости се прилагат различни подходи в зависимост от характера на тенденцията в динамичните редове.

За да се идентифицира тенденцията на динамичните редове, се използват различни статистически методи, които могат да се групират на параметрични и непараметрични. Към параметричните методи се включват тестовете за единичен корен, коефициентите на автокорелация и спектралните оценки, а към непараметричните – коефициентите на корелация на ранговете, броя на сериите на отклоненията около средната и критерия на Форстър и Стюърт и др. Параметричните методи се характеризират с по-висока мощност от непараметричните, което е предпоставка за предпочитането им при емпирични изследвания.

Стационарните модели могат да се представят с едно уравнение или със система от уравнения. В първия случай се изучава зависимостта между едно явление–резултат и един или повече фактора, а във втория се анализират сложни зависимости от системен характер, когато има преплитане между явленията и процесите или когато наличните зависимости между показателите са двупосочни.

Макар че взаимовръзките между явленията и процесите в социално-икономическата действителност са сложни и често имат комплексен характер, моделите с едно уравнение намират своето широко приложение. Те са подходящи при изучаването както на единични, така и на множествени зависимости, когато е обоснована причинната обусловеност между явленията, като един или повече показатели се интерпретират като факторни променливи, определящи явлението–следствие, представено чрез променливата–резултат.

Два са основните подхода при построяването на модели на зависимостта:

Първият подход представя текущото значение на резултативната величина като линейна комбинация (линеен филтър) на текущото и предходните значения на факторните променливи. Този вид модели са известни в практиката като *трансферни функции* или *модели на разпределени лагове*.

Вторият подход представя обусловеността на текущото значение на резултата от текущото значение на факторите и от предходните значения както на резултата, така и на факторните променливи. Този вид модели се обозначават като смесени модели на регресия и авторегресия.

На практика и двата подхода водят до един и същи резултат, тъй като смесените модели на регресия и авторегресия могат да се редуцират до модели на разпределени лагове (Box & Jenkins, 1970)².

² Именно поради това по-нататък в изложението термините „модели на разпределени лагове“ и „модели на трансферни функции“ ще се използват като синоними.

Статистическият анализ на динамични зависимости между социално-икономическите явления чрез модели с едно уравнение от вида на трансферните функции (разпределени лагове) е приложен за първи път през тридесетте години на двадесети век и се свързва първоначално с изследванията на Фишер за зависимостта между паричната маса, равнището на цените и лихвените проценти (Fisher, 1926), (Fisher, 100% Money and the Public Debt, 1936), а в средата на века – с изследванията на динамични процеси (Astrom & Bohlin, 1966). Моделите на разпределение на лаговете намират приложение при изучаването на: *функцията на инвестициите* – (Koyck, 1954), (Eisner, A Distributed Lag Investment Function, 1960), (Eisner, The Permanent Income Theory for Investment: Some empirical explorations, 1967), (Diamond, 1962), (de Leeuw, 1962), (Greenberg, 1964), (Griliches & Wallace, 1965), (Almon, 1965), (Jorgenson, 1963), (Jorgenson & Stephenson, The Time Structure of Investment Behavior in United States Manufacturing, 1947-1960, 1967), (Jorgenson & Stephenson, Investment Behavior in United States Manufacturing, 1947-1960, 1967), (Jorgenson & Stephenson, Issues in the Development of the Neoclassical Theory of Investment Behavior, 1969), (Jorgenson & Siebert, A Comparison of Alternative Theories of Corporate Investment Behavior, 1968), (Jorgenson & Siebert, Optimal Capital Accumulation and Corporate Investment Behavior, 1968), (Jorgenson & Hall, Tax Policy and Investment Behavior: Replay and Further Results, 1969); *паричното предлагане при хиперинфлация* – (Cagan, 1956), (Allais, 1966), (Barro, 1970); *търсене и предлагане на селскостопански стоки* – (Nerlove, 1956), (Nerlove, The Dynamics of Supply: Estimation of Farmers' Response to Price, 1958), (Nerlove & Waugh, Advertising without Supply Control: Some Implications of a Study of the Advertising of Oranges, 1961); *функцията на потреблението* – (Brown, 1952), (Zellner, 1957), (Zellner, Huang, & Chau, Further Analysis of the Short-Run Consumption Function with Emphasis on the Role of Liquid Assets, 1965), (Griliches, Maddala, Lucas, & Wallace, 1962), (Friedman, 1957), (Houthakker & Taylor, 1966), (Heien, 1969), (Nerlove, Lags in Economic Behavior, 1972).

Целта на изследователите е насочена към създаването на модели, позволяващи подобряването на контрола на производствените и технологичните процеси в индустрията и редица дейности в сферата на услугите, както и да се разработват по-точни прогнози за ефективно управление на материалните запаси и производствените цикли. Обобщено представяне на този тип модели и на методите за тяхното идентифициране и оценяване е извършено от Бокс и Дженкинс (Box & Jenkins, 1970). Те установяват, че трансферните функции са подходящи при характеризирането на инерционни динамични системи и използването им води до значително намаление на грешките при прогнозиране. Поради това статистическите модели с трансферни функции продължават да намират широко приложение в редица области в икономиката, инженерните науки, биологията, химията и астрономията.

Моделите на разпределени лагове са разработени, за да се идентифицира и оцени разпределението във времето на влиянието на факторите, обуславящи зависимата променлива. Това се прави на базата на аргументирано предположение за наличието на обективна, причинно-следствена връзка между явленията. Моделът на разпределени лагове е такъв динамичен модел, при който ефектът от изменението на независимата променлива се проявява в резултата с течение на времето, а не изцяло и изведнъж. Извеждането на трансферната функция се основава на тезата на Юл, че даден динамичен ред, чиито стойности са автокорелирани, може да се третира като ред от независими случайни „шокове”, трансформирани посредством линеен филтър (Yule, 1927). Линеиният филтър представлява претеглена сума на случайните „шокове”. Общият вид на модела с разпределени лагове (модел на трансферна функция) е следният (Tsay, 1985):

$$(2.1) y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t,$$

където: y_t е ендогенната променлива, представяща явлението–резултат (стационарен процес);

x_t е екзогенната (или поне предварително определена) променлива, отразяваща явлението–фактор (стационарен процес);

ε_t са остатъчните компоненти, отчитащи влиянието на невключените в модела фактори, под формата на стационарната променлива с нулева средна и постоянна ковариационна структура;

α е свободният член;

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ са лаговите коефициенти, наричани още лагови тегла, които формират функцията на реакцията (*impulse-response function*) и се наричат линеен филтър и разкриват начина, по който динамиката в екзогенната променлива се трансферира (прехвърля) върху ендогенната променлива. Филтърът може да се представи в компактна форма като:

$$\beta(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_k L^k + \dots,$$

където: L е лаговият оператор.

При общия вид на модела се приема, че ефектът върху резултата от изменението на фактора настъпва незабавно, т.е. започва от текущия период. Понякога е възможно влиянието да не е непосредствено, а да има известно забавяне в реакцията на резултата. В този случай първите s на брой лагови коефициента ще приемат нулеви значения, като величината на s определя изоставането във времето между промените във фактора и промените в резултата.

Интерпретацията на лаговите коефициенти е следната. Лаговият коефициент β_0 е измерител за незабавния (краткосрочния) ефект от единица изменение на независимата променлива в текущия период върху изменението в зависимата променлива през същия период. При условие че изменението в явлението–фактор се запази на същото равнище и в следващи периоди, промяната в явлението–резултат се определя от сумата от коефициентите през съответните периоди. Тази частична сума е възприета

в литературата като *динамичен пределен ефект* или *кумулятивен ефект* при определен лаг.

Когато двете променливи са в равновесие, промяна в независимата води до промяна в зависимата, която след определено време се установява на ново равновесно състояние. Разликата между старото и новото равновесно състояние на зависимата променлива се интерпретира като дългосрочен ефект от промяната на фактора върху резултата. Този *тълен (дългосрочен) ефект* от изменението на независимата променлива върху зависимата променлива се измерва с общата сума на всички лагови коефициенти. Отношението на всеки лагов коефициент спрямо общата сума на лаговете тегла е измерител за дела на ефекта в дадения момент от дългосрочния ефект.

Неограниченият брой коефициенти β_i може да се редуцира до краен брой параметри, ако се използва следното представяне на линейния филтър:

$$(2.2) \beta(L) = \frac{\omega_0 - \omega_1 L - \dots - \omega_r L^r}{1 - \delta_1 L - \dots - \delta_q L^q} L^s,$$

където: ω_i и δ_i са параметрите на два полинома, които апроксимират линейния филтър и са от порядък съответно r и q ;

s е забавянето в проявлението на ефекта от фактора върху резултата.

Общият брой параметри, които трябва да се оценяват в тази спецификация на линейния филтър е $(r + q + 1)$. Основните предизвикателства при приложението на моделите с трансферни функции произтичат от това, че лаговата структура на зависимостите между социално-икономическите явления не е теоретично обоснована. Това от своя страна поражда трудности при спецификацията на моделите на разпределение на лаговете и при тяхното последващо решаване, тъй като не могат да се определят порядъкът и структурата на полиномите $\omega(L)$ и $\delta(L)$.

В научната литература се срещат разнообразни подходи за спецификация и решаване на моделите на разпределение на лаговете. Без да претендираме за изчерпателност, тук ще представим някои от подходите, които могат да се систематизират в две основни направления. При първото броят на лаговете на независимата променлива се ограничава до определена дължина, отговаряща на момента, след който се допуска, че ефектът е нула. При второто се използва функционална форма, която позволява, лаговото разпределение да затихва до нула постепенно.

Първият подход, наречен подход „от частното към общото“, е предложен от Алт (Alt, 1942) и Тинберген (Tinbergen, 1949), и се състои в процедура за последователно оценяване на лаговите коефициенти чрез метода на най-малките квадрати, като моделът се представя във вида:

$$(2.2) y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_k x_{t-k} + \varepsilon_t,$$

където: k е броят на лаговете на зависимата променлива, оказващи влияние върху резултата.

Първоначално се оценява регресионен модел между текущите значения на изследваните показатели. Впоследствие в модела се добавят

лагове на обясняващата променлива, докато се изпълни едно от следните две условия за новите лагови коефициенти – или те да не са статистически значими (чрез t - критерий), или да се промени знакът им (от положителен в отрицателен или обратно).

Недостатъците на оценяването на модел с разпределени лагове чрез този подход са следните: **Първо**, възможно е да се допусне грешка при спецификацията на модела, тъй като максималният лаг, който следва да бъде включен в модела, е неизвестен. Пропускането на съществен за обясняването на зависимостта лаг на явлението–фактор би породило получаването на изместени и несъстоятелни оценки на параметрите на модела. **Второ**, заключенията въз основа на оцененния модел са неустойчиви. Този недостатък се дължи на това, че включването на всеки допълнителен лаг на независимата променлива води до намаляване с две на степените на свобода. Една, защото е необходимо да се оцени допълнителен параметър и една, поради намаляването на извадката с едно наблюдение. **Трето**, поражда се мултиколинеарност, тъй като за динамичните редове за социално-икономическите явления е присъща силна автокорелация. Така се нарушава изискването на метода на най-малките квадрати – обясняващите променливи да са независими помежду си. В резултат се получават големи стандартни грешки за оценените параметри, което може да доведе до погрешно заключение, че съответният лагов коефициент не е статистически значим.

Втори подход е разработен от Фишер (Fisher, Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags, 1937), като се приема, че последователността от неизвестните параметри следва аритметична прогресия. При допускане, че намалението започва след определен период $t-1$, при определена стойност на β_1 , могат да се установят и останалите параметри:

$$(2.3) \beta_i = \beta_1 \left(1 - \frac{i-1}{k} \right).$$

На тази основа модел (2.2) придобива вида:

$$(2.4) y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 z_{kt} + \varepsilon_t,$$

където:
$$z_{kt} = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{i-1}{k} \right) x_{t-i}.$$

Едно просто ограничение върху лаговете тегла е, последните да намаляват линейно до нула от първоначална положителна или отрицателна стойност. С други думи всяко от следващите тегла са линейно намаляващи части от незабавния ефект.

В този модел трябва да се оценят три параметъра – α , β_0 и β_1 . Намирането на оценките им е възможно по метода на най-малките квадрати. Изборът на k , такова че при $i > k$, параметрите $\beta_i = 0$, се постига чрез

минимализиране на сумата от квадратите на остатъчните елементи, т.е. при най-голям коефициент на детерминация.

Трети подход – последователността от неизвестните параметри се приема, че намалява като геометрична прогресия. На тази основа са моделите, разработени от Койк (Koyck, 1954), Каган (Cagan, 1956) и Нерлоув (Nerlove, Lags in Economic Behavior, 1972). Отново има допускане, че коефициентите са с еднакъв знак. Моделът на Койк се базира на чисто алгебрична трансформация на модела с безкрайни разпределени лагове (2.1), докато тези на Каган и Нерлоув се основават на икономическата теория за адаптивните очаквания.

Моделът се представя в следния вид:

$$(2.5) \quad y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 y_{t-1} + v_t.$$

Модел (2.5) се отличава от модел (2.1) със следното: първо, лаговете на независимата променлива x_t не участват в модела, а са заменени от един лаг на зависимата променлива y_{t-1} . Второ, остатъчните елементи са автокорелирани, дори и в изходния модел да не са били. Трето, необходимо е да се оценят само три неизвестни параметъра.

Предимствата при оценяването на модел (2.5) са, че няма мултико-линеарност. От друга страна, обаче оценката на модела (2.5) по метода на най-малките квадрати се затруднява (оценките на параметрите са изместени и несъстоятелни) поради автокорелацията в остатъчните елементи (нарушава се изискването за независимост на остатъците) и зависимостта между остатъчните елементи и y_{t-1} . Допълнителна трудност пред прилагането на метода на най-малките квадрати е, че не може точно да се оцени автокорелацията в остатъчните елементи. Класическият тест на Durbin-Watson е неприложим. Все пак обаче може да се използва модифициран негов вариант – DW-h.

Един възможен начин за оценка, при който се неутрализира автокорелацията в остатъчните елементи, е да се приложи авторегресионна трансформация или друга сходна процедура. Ако по някакъв начин тази корелация се премахне, методът на най-малките квадрати може да се приложи и да се получат състоятелни оценки при достатъчно дълги редове. При къси редове е възможно да се получат изместени оценки на параметрите. За да се избегне неустойчивостта, е необходимо остатъчните елементи да не са автокорелирани. С помощта на обобщения метод на най-малките квадрати се извършва трансформация на модела, след която е изчистена автокорелацията. Тъй като оценките по метода на най-малките квадрати са неустойчиви, такива са и всички тестови характеристики, базирани на остатъчните елементи. Например тестовата характеристика на Дърбин-Уотсън и други диагностични тестове за автокорелация и хетероскедастичност. За да се преодолее тази трудност, е необходимо, остатъчните елементи да бъдат получени по метод, различен от метода на най-малките

квадрати и неговите разновидности. Процедурата на Хилдрет-Лу е подходяща за оценка на модел с автокорелирани от първи порядък остатъчни елементи и лагова зависима променлива, но процедурите на Парис-Винстен и Кохран-Оркът не са подходящи и не бива да се използват.

Освен с техническите трудности при оценката на модели от типа (2.5), съществуват и трудности от теоретично естество. Например допускането, че влиянието на явлението-фактор е най-силно през текущия период не е реалистично за всички социално-икономически явления. Особено когато динамичните редове са с по-висока честота на регистрация, т.е. при тримесечни или месечни данни.

Четвърти подход. По-обща спецификация на ограничен модел с разпределени лагове е полином, изследван за първи път от Алмон (Almon, 1965). Алмон допуска, че последователността от лаговите коефициенти може да се апроксимира като полином от определена степен:

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_m i^m.$$

Моделът (2.2) се предефинира в:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \sum_{i=0}^k (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 i^2 + \dots + \alpha_m i^m) x_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \alpha + \alpha_0 \sum_{i=0}^k x_{t-i} + \alpha_1 \sum_{i=0}^k i x_{t-i} + \alpha_2 \sum_{i=0}^k i^2 x_{t-i} + \dots + \alpha_m \sum_{i=0}^k i^m x_{t-i} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$m \leq k$$

Полагайки:

$$z_{0t} = \sum_{i=0}^k x_{t-i}, z_{1t} = \sum_{i=0}^k i x_{t-i}, z_{2t} = \sum_{i=0}^k i^2 x_{t-i}, \dots, z_{mt} = \sum_{i=0}^k i^m x_{t-i},$$

окончателният модел, подлежащ на оценка, придобива вида:

$$(2.6) \quad y_t = \alpha + \alpha_0 z_{0t} + \alpha_1 z_{1t} + \alpha_2 z_{2t} + \dots + \alpha_m z_{mt} + \varepsilon_t.$$

Така трансформираният модел (2.6) може да бъде оценен по метода на най-малките квадрати. Въз основа на оценките на параметрите α_i могат да се получат оценки на параметрите β_i . Стандартните грешки се получават по формулата:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_i) &= \text{var}(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 i + \hat{\alpha}_2 i^2 + \dots + \hat{\alpha}_m i^m) \\ &= \sum_{j=0}^m i^{2j} \text{var}(\hat{\alpha}_j) + 2 \sum_{j < p} i^{(j+p)} \text{cov}(\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_p) \end{aligned}$$

Приложението на метода на Алмон изисква да се определят предварително максималната дължина на лага и степента на полинома. Това са субективни решения на всеки отделен изследовател, което поражда проблеми поради липсата на ясни насоки и препоръки. Неточното определяне

на тези характеристики директно поражда мултиколинеарност в модела поради специфичния начин на конструиране на $Z_{i,t}$.

В практико-приложен аспект най-често се използват полиноми от втора или трета степен. Най-общото приложение на полиномните лагове е да се ограничат коефициентите, да лежат на квадратична функция. Това осигурява плавна промяна на коефициентите, но позволява разнообразие във формите, в зависимост от това, каква част от параболата се използва. Полиномът от трета степен дава също плавна промяна, но с повече възможности за колебания. След трансформация моделът (2.6) се решава със стандартни линейни методи.

Квадратичното лагово разпределение може да доведе и нереалистични резултати. Например коефициенти, които не са сходящи към нула при дълги лагове или с отрицателни стойности в средата. Подобни резултати могат да са доказателство за грешна спецификация. Могат да се наложат такива ограничения върху квадратичните лагове, като например да са сходящи към нула.

Методът може да се използва и за полиноми от по-висока степен. Колкото по-висока е степента, толкова по-малко плавно е лаговото разпределение и повече параметри трябва да се оценят.

Предимствата на подхода на Алмон са, че: позволява да се оцени моделът (2.6) чрез оценка на полинома, като се елиминират проблемите, породени от автокорелацията; може да се използва при различна лагова структура на началния модел; броят на оценяваните параметри е по-малък, което дава по-ефективни оценки. Проблем на метода е, че се губи известен брой наблюдения в началото на редовете.

Пети подход – рационална функция. Целта на Йоргенсон (Jorgenson, Rational Distributed Lag Functions, 1966) е да представи клас от функции на разпределените лагове, които имат свойството, че произволна функция на разпределените лагове може да се апроксимира с известна степен на точност от член на този клас и че броят на параметрите, необходими за задоволително апроксимиране, е по-малък от изискваните за еднакво добро приближение от крайна функция на разпределени лагове. Този клас функции на разпределени лагове е дефиниран от изискването, че последователността от параметрите има рационална пораждаща функция. Тъй като този клас включва крайните разпределени лагове като частен случай, винаги е възможно да се апроксимира с известна степен на точност с най-много параметри, изисквани от крайна функция на разпределени лагове.

Класът рационални функции за разпределените лагове се дефинира от условието, че последователността от търсените параметри има рационална пораждаща функция. Пораждащата функция за редицата от параметри е:

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots$$

Ако функцията е рационална, може да се запише като:

$$P(s) = \frac{U(s)}{V(s)},$$

където: $U(s) = u_0 + u_1s + \dots + u_ms^m$;

$$V(s) = v_0 + v_1s + \dots + v_ns^n.$$

Подходът на Йоргенсон се реализира като трансформация на лаговото разпределение под формата на отношение на два крайни полинома на лаговия оператор:

$$y_t = \frac{a_0 + a_1L + a_2L^2 + \dots + a_mL^m}{1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_nL^n} x_t.$$

Построяването на статистически модел за анализ на динамичната зависимост с трансферна функция (модел на разпределени лагове) преминава през три основни етапа – идентификация, решаване на модела и диагностика.

Основно средство за **идентификация** на модела е кроскорелационната функция, разкриваща взаимовръзката между явлението–резултат и явлението–фактор във времето. На основата на кроскорелационните коефициенти се получават началните оценки на лаговите тегла на линейния филтър (2.2), както и предположения за броя на лаговете r и q на двата полинома и за изоставането s . Идентификацията преминава през следните стъпки:

1. Изчистване на автокорелацията в реда на факторната променлива. Наличието на автокорелация в двата реда води да получаване на изместени оценки на кроскорелационните коефициенти, което налага изчистване на автокорелацията, наречено „избелване“ (pre-whitening). За целта се построява смесен модел на авторегресия и плъзгачи се средни за факторната променлива:

$$ARMA(m, k): \varphi(L)x_t = \theta(L)e_t,$$

където: m е порядъкът на компонента на авторегресия;

k – порядъкът на компонента на плъзгачите се средни.

2. На базата на модела $ARMA(m, k)$ се конструира линейен филтър, с който се трансформира резултативната променлива:

$$y_t = \frac{\theta(L)}{\varphi(L)} u_t.$$

3. Оценка на кроскорелационните коефициенти се изчисляват на базата на остатъчните величини e_t и u_t :

$$\rho_s = \frac{cov(u_t; e_{t-s})}{\sigma_u \sigma_e},$$

където: ρ_s са оценките на кроскорелационните коефициенти, характеризирани силата на зависимостта между значенията на резултата и значенията на фактора, отместени s периода назад във времето.

4. Определят се оценките на лаговите тегла:

$$\beta_j = \rho_j \frac{\sigma_u}{\sigma_e}.$$

Анализът на лаговете тегла позволява да се изведат приблизителните значения на изоставането s и на порядъка r и q на полиномите. Това става на базата на следните положения:

- $\beta_j = 0$ при $j < s$;
- значенията на коефициентите $\beta_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \dots, \beta_{s+r-q}$ не следват определена последователност;
- значенията на коефициентите β_j при $j > s + r - q_s$ изпълняват условието $\beta_j = \delta_1 \beta_{j-1} + \dots + \delta_q \beta_{j-q}$.

Когато е необходимо да се идентифицира трансферната функция при повече фактори, се използва методологията на Лу и Хансен (Liu & Hanssen, 1982) и Цей (Tsay, 1985). Тя следва основните стъпки на вече посочената схема, но с тази разлика, че филтърът, с който се преобразуват зависимата и независимите променливи, се построява не на базата на смесен модел на авторегресия и плъзгащи се средни на фактора, а на базата на авторегресионен модел, построен за случаен вектор, извлечен от обединението на всички променливи – факторни и резултативни. Първоначалните оценки на порядъка на компонентите на факторите и на резултативната променлива се получават на базата на метода, предложен от Бегуин и Монфор (Beguin & Monfort, 1980).

Решаването на модела на трансферната функция става с помощта на метода на максималното правдоподобие (използват се разновидностите CMLE и EMLE). По време на максимализирането на функцията на правдоподобие се извършва съвместно оценяване на всички неизвестни параметри на вече специфицирания през фазата на идентификацията модел. Остатъчните елементи в модела се приемат за независими и идентично разпределени случайни величини, следващи нормално разпределение. Важно е да се отбележи, че получените оценки са условни, тъй като свойствата им (неизместеност, ефективност и състоятелност) зависят от коректността на идентификацията. В определени частни случаи, когато линейният филтър има сравнително опростена форма, е възможно, функцията на максималното правдоподобие да се максимализира аналитично. В повечето практически изследвания обаче, функцията на правдоподобие има сложен нелинеен характер и се налага числово оптимизиране за установяване на нейния максимум, като за целта се използва специализиран статистически софтуер.

Диагностичната проверка на модела се състои в това, че остатъчните елементи трябва да са случайни по смисъла на теорията на вероятностите. Иначе казано, те трябва да са независими и нормално разпределени случайни величини с равни дисперсии. При спазване на тези изисквания параметрите на модела са неизместени, ефективни и състоятелни оценки, които могат да се използват за анализ и интерпретация. Диагностиката се извършва в следните направления:

- проверка за **нормалност**, която се основава на тестовете на Жак-Бера и Колмогоров-Смирнов;
- проверка за **автокорелация** (независимост) с помощта на корелограмата, тестовете на Бокс-Люнг, Бокс-Пиърс и обобщения тест на независимост;
- проверка за **хетероскедастичност** чрез тестовете на Уайт, Бройш-Паган, Глейзер, Годфри-Квандт;
- проверка за **условна авторегресионна хетероскедастичност** на основата на корелограмата на квадратите на остатъчните елементи и на тестовете за наличие на *ARCH* ефект;
- проверка за **адекватност** на базата на теста на Фишер и информационните критерии.

Целта на диагностичната проверка е да се установи коректността на спецификацията на модела и доколко са изпълнени предположенията, залегнали при извеждането на оценките на параметрите и метода за оценяване. Поради динамичния характер на изучаваните зависимости диагностичният анализ фокусира основно върху анализа на автокорелацията в остатъчните елементи.

1.3. Множествени модели на динамични зависимости при стационарни редове

Всички представени дотук модели са от вида модели с едно уравнение, при което е налице допускане за липса на обратна връзка между променливите. При практическото приложение на моделите за анализ на динамични зависимости често са налице ситуации, когато предположението за еднопосочна зависимост не е достатъчно обосновано, тъй като включеният в модела – като независима променлива – показател на свой ред зависи от други фактори, в т.ч. и от самата зависима променлива, т.е. налице е взаимозависимост или двупосочна връзка. В социално-икономическата сфера връзките имат сложен и комплексен характер, което изисква, за задълбочаване на анализа да се използва модел, който да обхване важните, съществени връзки между променливите и то разгледани не поотделно – всяка сама за себе си, а като система от връзки и взаимодействия. Само така може да се осъществи пълноценен анализ на динамичните зависимости и взаимодействия и да се използва цялата налична информация в динамичните редове на показателите – като се използва система от уравнения, наречена в статистическия анализ на зависимости система от *симултанни уравнения*. Симултанните уравнения се разглеждат като структурни модели, тъй като чрез решаването и интерпретирането им могат да се извличат знания за вътрешната структура на връзките между явленията и процесите.

Приложението на симултанните системи уравнения обогатява познавателното значение на статистическия анализ на динамични зависимости

поне в три направления. На **първо място**, свързването на различни регресионни уравнения в система позволява да се разкрие степента на зависимост от други фактори, включени в системата в динамичен аспект – т.е. да се проследи комплексно синхронизацията (избързването и изоставането) между всички показатели. На **второ място**, появява се възможност да се изследват посоките на зависимостите и по този начин да се проверяват предположенията за екзогенност (ендогенност) на променливите. На **трето място**, построяват се комплексни форми на функциите на реакцията, които позволяват да се проследи ефектът от промяна на една отделна контролирана променлива върху всички останали и по този начин се разкриват нови възможности за контрол и управление на процесите и явленията.

Приложението на комплексни модели в икономиката обхваща модели, които съдържат повече от едно уравнение (обикновено наричани структурни) и свързано, в система описват основните икономически сфери, дейности и взаимоотношения между тях. Свързано означава, че едни и същи променливи (особено вътрешни) могат да присъстват в повече от едно уравнение в системата. Въпреки че математически модели се изграждат и преди това, прието е, че историята на създаването на такива иконометрични модели преди всичко започва с моделите на Тинберген за бизнес-циклите (Tinbergen, *Business Cycles in the United States, 1919–1932, 1939*) и макроикономическото моделиране, развито от Клайн и Голдбергер (Klein & Goldberger, 1955), според които са необходими поне 50 уравнения, за да се представи адекватно поведението на националната икономика. Развитието на изчислителната техника позволява да се прилагат тези, а и по-сложни модели.

За разлика от моделите с едно уравнение, в симултанните модели са включени повече от една зависими (ендогенни) променливи. Това налага да се състави система от толкова уравнения, колкото са ендогенните променливи. Характерно за тях е, че зависима променлива в едно уравнение участва като независима в друго. Като следствие тази променлива е корелирана с остатъчните елементи в уравнението, където е независима. Това води до трудности при оценката с класическия метод на най-малките квадрати, тъй като оценките стават изместени и несъстоятелни.

Общо представяне на система от симултанни уравнения има вида:

$$By_t + Gx_t = u_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

където: y_t е вектор от G на брой взаимно определени или ендогенни променливи;

x_t са K на брой предварително определени (екзогенни и лагове на ендогенните) променливи;

u_t са случайните отклонения;

B и G са матриците със структурните параметри, с размерност съответно $G \times G$ и $G \times K$.

В подобна структурна форма всяко уравнение описва част от икономиката (икономическите зависимости), представящо ендогенната променлива чрез други ендогенни и предварително определени променливи.

За да се открие начинът, по който предварително определените променливи дефинират ендогенните, моделът може да се представи в редуцирана форма:

$$y_t = \Pi x_t + v_t,$$

$$\text{където } \Pi = -B^{-1}G \text{ и } v_t = B^{-1}u_t.$$

При системите от симултанни уравнения променливите се класифицират като ендогенни и екзогенни. Класическите определения са, че ендогенните променливи са определени в рамките на модела, докато екзогенните не са. Ендогенните променливи са взаимно определени, а екзогенните са предварително определени. Лаговете на ендогенните променливи влизат в групата на предварително определените. Ендогенните променливи са тези, които са обект на изследване чрез модела, т.е. тяхното поведение трябва да се установи и прогнозира. Екзогенните променливи от своя страна не зависят от ендогенните, но ги определят.

Идентификацията е проблем, който предшества оценката на параметрите на симултанните уравнения и се свързва най-общо с възможността да се получат състоятелни оценки. Един модел е точно идентифициран, само когато е възможно да се получат оценки за структурните коефициенти въз основа на коефициентите, получени при решаването на модела в редуцирана форма. Ако това е възможно за конкретно уравнение в системата, то се определя като идентифицирано. Ако не е възможно, то уравнението не е идентифицирано. Идентифицираното уравнение може да бъде точно идентифицирано или свръхидентифицирано. Уравнението е точно идентифицирано, ако единствени структурни параметри могат да се получат от редуцираните параметри. Свръхидентифицирано е, ако повече от една стойност могат да се получат за структурните параметри. Този идентификационен проблем се появява, защото различни значения на структурните параметри могат да са едновременно в съответствие с емпиричните данни, т.е. дадено уравнение в редуцираната си форма може да е в съответствие с различни структурни модели.

Установяването на идентификацията на системата от уравнения се свежда до проверка, дали всяко уравнение е идентифицирано или не. Необходимо условие за идентификация на едно уравнение е условието, че броят на променливите, които не са включени в уравнението, трябва да бъде по-голям или равен на броя на ендогенните променливи в уравнението минус единица. Ако g е броят на ендогенните променливи в системата и k е общият брой на ендогенни и екзогенни променливи, които не са включени в уравнението, тогава:

при $k = g - 1$, уравнението е точно идентифицирано;

при $k > g - 1$, уравнението е свръхидентифицирано;

при $k < g - I$, уравнението е неидентифицирано.

Класификацията на уравненията в тези групи е важна. Не е възможно да се получат състоятелни оценки за неидентифицираните уравнения. Разликата между свръхидентифицираните и точно идентифицираните е, че последните са по-лесни за оценка.

Методите за оценка на параметрите на симултанните уравнения се разделят на две основни групи – решаване на всяко уравнение по отделно и решаване на всички уравнения едновременно, като система. Едновременното решаване на цялата система е сложен и ресурсно тежък процес, дори и с развитието на изчислителната техника, тъй като се базира на твърде много предположения относно случайните компоненти в системата. В практиката са получили развитие голям брой методи за оценка уравнение по уравнение. При тях всяко уравнение се оценява по-отделно, като се отчитат ограниченията върху коефициентите във всяко уравнение. Използват се ограниченията само в уравнението, което се решава. Затова този тип методи са наречени методи при ограничена информация. Ограниченията в другите уравнения се ползват само за идентификацията. При методите с пълна информация се използват както ограниченията във всички уравнения, така и за вариацията и ковариацията във всички уравнения.

Основните методи за оценка на параметрите са:

- косвен метод на най-малките квадрати;
- метод на инструментални променливи;
- двустъпков метод на най-малките квадрати;
- тристъпков метод на най-малките квадрати;
- метод на максималното правдоподобие при ограничена информация;
- метод на максималното правдоподобие с пълна информация.

Когато едно уравнение е точно идентифицирано, всички методи дават еквивалентни резултати. При свръхидентифицираните уравнения, методът на инструменталните променливи дава различни резултати в зависимост от това, кои от липсващите екзогенни променливи са избрани за инструменти. Двустъпковият метод на най-малките квадрати може да се разглежда като вариант на метода на инструменталните променливи с претегляне.

При свръхидентифицирани уравнения двустъпковият метод на най-малките квадрати зависи от нормализацията при преминаването в редуцирана форма, докато методът на максималното правдоподобие при ограничена информация не зависи от нея. Това е съществено предимство на метода на максималното правдоподобие при ограничена информация, тъй като всички ендогенни променливи са взаимно определени и нормализацията не би трябвало да има значение.

Както може да се проследи, оценката на параметрите на симултанните уравнения е пряко свързана с идентификацията на уравненията.

Поради това често в сложните модели се въвеждат допълнителни променливи или се премахват вече включени единствено с цел да се постигне точна идентификация, дори и да се влезе в противоречие с изискванията за теоретичната състоятелност. Именно поради това анализът на комплексните зависимости между повече променливи се изследва с помощта на друг тип модели – **векторната авторегресия** (Sims, 1980).

Моделите на векторна авторегресия приличат на симултанни модели по това, че няколко променливи са ендогенни. В чистия си вид обаче те представят всяка ендогенна променлива като зависима от определен брой нейни лагове и лагове на другите променливи. Моделите на векторна авторегресия са един от най-успешните, гъвкави и лесни за приложение модели за анализ на динамични зависимости. Те са естествено надграждане на методите за анализ на динамични редове до анализ на многомерни динамични зависимости между редовете. Моделите на векторна авторегресия са особено полезни за описване на динамичната зависимост между явленията и за прогнозиране. Видът им е подходящ за разработване на прогнози, тъй като те се основават на развитието във времето на включените в модела променливи, чието минало е известно. Освен това този клас модели служи за отправна точка на коинтеграционния анализ.

Тъй като се разполага с повече от един динамичен ред, може да се състави система от авторегресионни модели. Ако моделът на векторна авторегресия се разгледа като редуцирана форма, то съответстващата му структурна форма се нарича модел на структурна векторна авторегресия.

Моделите на структурна векторна авторегресия имат четири основни области на приложение. **Първо**, те се използват, за да се изучи очакваната реакция в променливите при въвеждане на еднократен структурен шок. **Второ**, те позволяват да се конструират измерители на основата на декомпозицията на вариацията на грешките, които измерители да отчетат средния принос на даден структурен шок към разсейването на данните. **Трето**, могат да се използват за осигуряване на историческо декомпозиране, което измерва кумулативния принос на всеки структурен шок към еволюцията на всяка от променливите. Историческите декомпозиции са съществени например за опознаването на генезиса на рецесиите или шоковете от енергийните цени (Edelstein & Kilian, 2009), (Kilian & Murphy, 2011). **Четвърто**, моделите позволяват да се правят прогнозни сценарии въз основа на хипотетични последователности от бъдещи шокове (Waggoner & Zha, 1999), (Baumeister & Kilian, 2012).

Симс поставя акцент върху необходимостта да се премахнат ограниченията за изключване и емпирично неаргументираните допускания за екзогенност. Също така той акцентира върху необходимостта, всички променливи да се моделират съвместно като ендогенни. Всички тези точки издържат проверката на времето. Има много литература за спецификацията и оценката на редуцирани модели на векторна авторегресия – (Watson, 1994), (Lütkepohl, 2005), (Lütkepohl, Vector autoregressive models, 2011).

Успехът на подобни модели на векторна авторегресия като средства за описване и донякъде прогнозиране е добре установен. В същото време възможността на структурните представяния на векторната авторегресия да се използват за разграничение между корелация и причинност, остава спорна.

Структурната интерпретация на моделите на векторна авторегресия изисква въвеждането на допълнителни идентификационни допускания, които следва да са мотивирани въз основа на институционални знания, икономическа теория или други външни ограничения за реакциите в модела. Само след като се декомпозират прогнозните грешки в структурните шокове, които са взаимно независими и имат икономическа интерпретация, можем да определим причинните ефекти на тези шокове върху променливите. Много от ранните изследвания с модели на векторна авторегресия пропускат да отчетат това изискване и разчитат на емпирично правдоподобни допускания за идентификацията, които нямат икономическа логика. Такива атеоретични модели на векторна авторегресия стават мишена на силна критика (Cooley & LeRoy, 1985), подсилваща развитието на експлицитни структурни модели на векторна авторегресия след 1986 година. Това от своя страна води до развитие на методологията, за да се даде отговор на въпросите за валидността на широко използваните идентификационни допускания.

Моделът на векторна авторегресия може да се представи в следния вид:

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + U_t,$$

$$z_t = B_1 z_{t-1} + \dots + B_p z_{t-p} + \varepsilon_t,$$

където: z_t и ε_t са $n \times 1$ вектори;

B_j са $n \times n$ матрици.

Всеки показател зависи от миналата история на всички редове през съответните лагове. Моделът на векторна авторегресия включва m променливи, всяка от които е представена като линейна функция на p свои лага и на останалите променливи и остатъчни елементи.

Структурната форма на модела на векторна авторегресия е:

$$B_0 y_t = B_1 y_{t-1} + \dots + B_p y_{t-p} + u_t,$$

където: u_t е структурен шок, който се характеризира с нулева средна и липса на автокорелация.

$$B(L)y_t = u_t,$$

където: $B(L) \equiv B_0 - B_1 L - B_2 L^2 - \dots - B_p L^p$.

Вариационно-ковариационната матрица на структурните шокове се нормализира така, че:

$$E(u_t u_t') \equiv \Sigma_u = I_k.$$

Това означава, че: **първо**, има толкова на брой структурни шока, колкото са променливите в модела. **Второ**, структурните шокове не са взаимно корелирани, т.е. Σ_u е диагонална матрица. **Трето**, матрицата е така нормализирана, че вариацията на всички структурни шокове да е единица. Това не създава проблеми, тъй като диагоналните елементи на B_0 не са ограничени.

Структурната форма позволява да се представи зависимостта и от текущото значение на променливите. Това създава проблем при оценяването, тъй като има изместване, породено от симултанността. За разлика от структурната форма на модела, при редуцирана форма зависимостта е само от предходни стойности и няма мигновено влияние. Преходът от структурната към редуцираната форма се извършва чрез умножение с обратната матрица:

$$B_0^{-1} B_0 y_t = B_0^{-1} B_1 y_{t-1} + \dots + B_0^{-1} B_p y_{t-p} + B_0^{-1} u_t$$

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$A(L) y_t = \varepsilon_t$$

$$A(L) \equiv I - A_1 L - A_2 L^2 - \dots - A_p L^p$$

$$A_i = B_0^{-1} B_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \varepsilon_t = B_0^{-1} u_t$$

Тъй като приложението на моделите на векторна авторегресия представлява многомерен вариант на авторегресионните модели, то и наличните изисквания за **стационарност** се запазват, но вече трябва да са валидни за всички уравнения в системата. Само по този начин се гарантира стабилност на моделираните процеси и обратимост, при условие че се премине към процеси на плъзгащи се средни.

Лесната спецификация на моделите на векторна авторегресия е важна причина за тяхната популярност в иконометричното моделиране. Моделите имат свойството, че всяка променлива се представя като функция на собствените си лагове и лаговете на всички останали променливи в системата. По този начин лаговата структура (разпределение) за всички променливи във всички уравнения е една и съща, което опростява изчислителните и оценъчните процедури. Тъй като динамиката на зависимостта се обхваща чрез лаговете променливи, основните детерминанти са **броят на променливите и броят на лаговете**.

Общият брой на параметрите, които трябва да се оценяват в модела на векторна авторегресия, е:

$$n = k^2 p + k,$$

където: k е броят на участващите променливи;

p – броят на лаговете на променливите.

Увеличаването на броя на участващите променливи, както и увеличаването на броя на лаговете намалява степените на свобода на модела и понижава ефективността на оценките, затруднява и интерпретацията на динамичните зависимости между променливите. Поради това при практическото използване на векторната авторегресия е необходимо да се извършва прецизна идентификация и спецификация на модела.

При избора на променливите, които участват в модела, трябва да се държи сметка за природата на анализирания икономически явления и теоретичните постановки на икономическата наука, както и да се използват емпиричните резултати от анализите на други изследователи. Внимателният подбор на променливите предполага да се използват тези, които най-точно измерват интересувашото ни явление. Добавянето на странични променливи намалява степените на свобода и понижава ефективността. Изпускането на важни променливи поражда изместване и затруднява интерпретацията на оценките на параметрите.

При определяне на броя на включените лагове в модела се използват три основни подхода: **първият** се основава на теста за причинност на Грейнджър, **вторият** се базира на оценка на функцията на реакцията на променливите и **третият** има за основа вариацията на шоковете в модела.

Тестът на Грейнджър се използва най-общо, за да се провери дали динамиката на един ред поражда измененията, налични в друг ред, т.е. показва доколко е полезна една променлива за прогнозиране на измененията в друга. Подобен естествен подход за разкриване на динамичната структура на модела на векторна авторегресия позволява да се разграничи дали определена променлива се обяснява от лаговете на някоя друга променлива по-добре отколкото от собствените си лагове. Когато един ред се прогнозира по-добре на основата на информация от други редове, а не от своето минало, това се дефинира като „причинност по Грейнджър“³. Конкретната форма на теста е на базата на хипотеза, проверяваща статистическата значимост на регресионните коефициенти на единичен модел, оценен като смесен модел на регресия и авторегресия. Важно е да се отбележи, че тестът се извършва и в двете посоки – т.е. всяка от променливите се проверява доколко поражда другата. Тъй като векторната авторегресия се характеризира от всяка променлива, изразена чрез лаговете на другите променливи в системата, преминаването през теста е еквивалентно на идентифициране на това, кои променливи са важни за прогнозирането на дадена зависима променлива, респективно – лаговете на кои променливи да се включват в уравнението на зависимата променлива.

³ Трябва да се отбележи, че „причинността по Грейнджър“ не е синоним на причинно-следствена връзка. Причинно-следствената връзка води до регистриране на „причинност по Грейнджър“, но обратното твърдение не е гарантирано. Поради това и се въвежда терминът „причинност по Грейнджър“, за да се разграничи от закономерно обусловената причинно-следствена връзка.

Оценката на функцията на реакция е алтернативен подход, базиран на трансформация на векторната авторегресия в модел на вектор на плъзгащи се средни. Трансформацията позволява, зависимите (ендогенните) променливи да се представят чрез текущите и миналите значения на шоковете. Чрез тази трансформация, която е съществена за методологията на Симс, е възможно да се проследи влиянието във времето на различните шокове върху зависимите променливи. Функцията на реакцията се оценява директно от параметрите на модела на плъзгащите се средни, като се спазват условията на обратимост. Значимите параметри дават възможност да се прецени как шоковете в едни променливи оказват влияние и върху другите променливи и по този начин да се установи кои лагове трябва да се включват в модела.

Вариацията на шоковете се използва на основата на информационните критерии, тъй като те измерват информацията за зависимата променлива, която се съдържа в набора от регресори. Те са измерители за адекватност (goodness-of-fit) като коефициента на детерминация, но без да дават информация за дела на обяснената вариация. Най-често се прилагат информационният критерий на Акайке (AIC) и бейсовият информационният критерий (BIC), наречен още критерий на Шварц. Целта е да се постигне минимална сума от квадратите на остатъчните елементи. Всички модели трябва да се оценяват при еднакви по обем извадки. При моделите с по-късите лагове има повече наблюдения. Първият компонент е логаритъмът на стандартната грешка на оценката, некоригирана със степени на свобода. Той измерва колко добре моделът обяснява зависимата променлива. Вторият компонент е наказателен, който е в пряка зависимост от броя на оценяваните параметри. Увеличаването на лагове подобрява адекватността, но и увеличава втория компонент. Чрез информационните критерии се търси баланс между намаляването на грешката и намаляването на степените на свобода, което е директно свързано с принципа за пестеливост. BIC наказва допълнителните параметри по-силно от AIC. По BIC винаги се избира по-къса или равна на AIC дължина. Използването на двата критерия става съвместно, като единият определя горната граница за броя на лаговете, а другият – долната граница.

Тъй като моделът векторна авторегресия в своята редуцирана форма може да се разглежда като разширение на авторегресионните модели – многомерен вариант, при определени предположения за независимост и идентичност на остатъчните елементи, за **оценката на параметрите** може да се използва методът на най-малките квадрати за всяко уравнение поотделно. Ако остатъчните елементи освен това са нормално разпределени, оценките по метода на най-малките квадрати съвпадат с оценките по метода на максималното правдоподобие – те са неизместени, състоятелни и ефективни. Неизместени са и оценките на шоковете (грешките) от редуцирания модел и тяхната вариационно-ковариационна матрица.

При условие че не са наложени допълнителни ограничения върху матрицата на параметрите B_j и вариационно-ковариационната матрица, и при положение че във всяко уравнение може да има различен брой регресори, се налага да се използва методът на максималното правдоподобие. Ефективни и асимптотично състоятелни оценки се получават след максимализиране на функцията на правдоподобие, което най-често става с приблизителни методи. Най-често се използват итеративните процедури на Гаус-Нютон и Нютон-Рафсън, тъй като функцията на правдоподобие е нелинейна по отношение на оценяваните параметри. Алгоритмите за оптимизация са на разположение в повечето софтуерни пакети за статистически анализ на динамични редове и зависимости.

Основните **проблеми** при използването на моделите на векторна авторегресия са свързани с трудностите при идентификацията и с ефективността на оценките. Тези два въпроса са свързани помежду си.

Поради включването на лагове на всички променливи във всяко едно уравнение дори при малки по обем модели се генерират много параметри. Това от своя страна намалява степените на свобода, понижава ефективността и затруднява интерпретацията на динамичните зависимости между променливите в системата, ако се вземат предвид стойностите (величините) и знаците на оценките на параметрите на модела. От друга страна, ако не се включат достатъчно на брой лагове, ще се появи автокорелация в остатъчните елементи, което при наличие на лагове на зависимата променлива води до изместени и несъстоятелни оценки на коефициентите.

Когато предмет на интерес представляват структурните шокове, трябва да се има предвид, че те не могат винаги да се получат на основа на редуцираните. Това е принципен проблем, който може да се разреши само в известен брой конкретни спецификации на модела на векторната авторегресия. В общия случай обаче обратната трансформация – от редуцирана в структурна форма не е еднозначна – на една и съща редуцирана форма съответстват повече от една структурни форми. Поради това структурният модел не може да бъде възстановен от оценения модел.

При специфицирането на модела на векторна авторегресия за анализ на икономически явления и процеси се налага да се въвеждат и ограничения съобразно постановките на икономическата теория. Тези ограничения по отношение на знаците на параметрите, лаговата структура на зависимостта и броя на променливите може да предизвикат усложняване на модела и проблеми при оценката и диагностиката. Например при структурните векторни авторегресионни модели, стоящият в основата им икономическият модел предполага мигновена реакция на процесите при промени на едни или други явления. Така, те позволяват идентификацията на параметрите на икономическия модел и структурните шокове.

2. Моделиране на динамични зависимости при нестационарни редове

Икономическите динамични редове в огромната си част са нестационарни, което силно затруднява анализа на зависимости, базиран на съдържателята се в тях информация. В литературата по въпроса има различни препоръки, свързани с използването на първите разлики (диференчен метод), елиминирание на тенденцията, включване на времето като факторна променлива и т.н. При тези методи са наблюдава често загуба на част от информацията, включително се пропускат важни закономерности, които се изразяват в съвместната динамика в равнищата и в обусловеността на такива икономически явления, които се намират в силна, закономерна причинно-следствена връзка. Тези идеи се доразвиват през 70-те години от David Hendry. Неговата методология се различава от тази на Бокс и Дженкинс и се базира на принципа за балансираност на регресионното уравнение. Фактът, че редовете са нестационарни в равнища, изисква техни линейни комбинации да са стационарни, за да бъдат остатъчните елементи стационарни. Емпиричният успех на подобни модели поставя необходимост, аналитично да се изследва въпросът за комбинирането на нестационарните променливи, което довежда и до идеите за коинтеграция през 80-те години на 20 век.

2.1. Моделиране на дългосрочни зависимости

Коинтеграцията най-общо представлява специфична особеност на група (два или повече) нестационарни динамични редове. Понятието за „*коинтеграция*“ (*cointegration*) е въведено от Грейнджър (Granger, 1981). Редовете с тенденция на развитие се наричат интегрирани редове от определен порядък, като броят на първите последователни разлики, които трябва да се приложат, за да трансформират редовете в стационарни, определя порядъка на интеграцията. Когато се състави линейна комбинация на интегрирани редове, тя би трябвало също да е интегрирана – т.е. линейната комбинация от нестационарни редове също е нестационарна. Съществува обаче един особен случай, при който линейната комбинация на нестационарни редове става стационарен ред, или в общия случай – линейната комбинация на интегрирани редове от определен порядък е интегрирана от по-нисък порядък. Този специфичен случай се дефинира като наличие на коинтеграция между участващите в линейната комбинация динамични редове.

Коинтеграционният анализ се свързва първоначално с разработките на Грейнджър – (Granger, 1981), (Granger & Weiss, Time series analysis of error-correction models, 1983) и е формализиран от Грейнджър и Енгъл

(Engle & Granger, 1987). Оттогава коинтеграционният анализ е предмет на множество теоретични и емпирични изследвания.

В основата на приложението на моделите на коинтеграция и моделите с корекция на грешката лежи идеята за равновесното състояние между социално-икономическите явления. Устойчиво е това равновесие, при което съществува механизъм за възстановяване на равновесното състояние, ако последното е нарушено вследствие на определено въздействие. За редица икономически показатели е характерно да са в постоянна пропорция помежду си в дългосрочен аспект, т.е. да следват обща тенденция в динамичното си развитие. Краткосрочните им отклонения от общия тренд, които са следствие от различни външни или вътрешни фактори, се неутрализират в дългосрочен план от действието на пазарен, регулаторен или друг механизъм. Например в резултат от пазарния арбитраж такива показатели могат да са доходността с различен матуритет и цените на различни пазари, а държавните приходи и разходи са нормативно уредени в националните бюджетни системи. В различни икономически отрасли се очаква постоянно съотношение между реализираните продажби и производствените разходи и др.

Формалната дефиниция за наличие на коинтеграция гласи:

Нека x_t е вектор от n на брой променливи, представени с динамични редове, като всички те са интегрирани от порядък d :

$$x_t \sim I(d).$$

Ако съществува вектор от коефициенти:

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

такъв, че линейната комбинация:

$$\beta \cdot x_t' = \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \dots + \beta_n x_{n,t}$$

е интегрирана от порядък $d - c$, където $c > 0$, то компонентите на вектора са коинтегрирани от порядък d, c :

$$x_t \sim CI(d, c).$$

Векторът β се нарича *коинтеграционен вектор*.

Елементите на коинтеграционния вектор могат да бъдат нули, но поне два трябва да са различни от нула. Ако има два вектора, които водят до интегрирана от един и същи порядък комбинация, тогава всяка линейна комбинация на тези два вектора също е коинтеграционен вектор. Това се нарича проблем на идентификацията. Ако е налице подобен случай и няма на разположение допълнителна информация, дългосрочната зависимост не може да се идентифицира.

Най-простият възможен случай е, когато има два динамични реда, всеки интегриран от първи порядък и тяхната линейна комбинация е стационарна. Тогава са казва, че редовете са коинтегрирани.

От дефиницията произтичат следните особености:

Първо, коинтеграцията се отнася до линейна комбинация на нестационарни динамични редове. Теоретично е възможно да съществува и

нелинейна дългосрочна зависимост. Коинтеграционният вектор не е единствен. Ако $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ е коинтеграционен вектор, тогава за всяко k , различно от нула, $k\beta = (k\beta_1, k\beta_2, \dots, k\beta_n)$ е също коинтеграционен вектор. Обикновено една от променливите се използва, за да се *нормализира* векторът, като се фиксира коефициентът ѝ на единица:

$$k = \frac{1}{\beta_1}.$$

Второ, по дефиницията коинтеграцията се отнася до променливи, които са *интегрирани от еднакъв порядък*. Не всички интегрирани променливи са коинтегрирани. Липсата на коинтеграция предполага липса на дългосрочно равновесие между променливите, така че те се отклоняват едни от други. Ако две променливи са интегрирани от различен порядък, те не могат да са коинтегрирани. Възможно е, обаче, да се намери равновесна зависимост на групи променливи, които са интегрирани от различен порядък, но само ако в групата има повече от една коинтеграционна зависимост, при което се получава изравняване на порядъка. Например, ако има променливи, интегрирани от втори порядък, за които съществува линейна комбинация, интегрирана от първи порядък, тогава е възможно, тази тяхна комбинация на свой ред да бъде коинтегрирана с други интегрирани от първи порядък променливи. Този случай се нарича *мултикоинтеграция*.

Трето, тъй като е възможно да има повече от един коинтеграционен вектор за набор от интегрирани от първи порядък променливи, то броят на тези коинтеграционни вектори се нарича *коинтеграционен ранг* на x_t . Ако в x_t има установени n на брой нестационарни компонента, то може да има най-много $(n - 1)$ линейно независими коинтеграционни вектора. Ако променливите са само две, между тях може да съществува само един коинтеграционен вектор. Този единствен коинтеграционен вектор съдържа дългосрочната информация, с което се отличава от модела, в който зависимата променлива е трансформирана с първи последователни разлики.

Най-важно предимство на подхода е, че използването на модели на коинтеграция между нестационарните редове позволява да се изследват едновременно дългосрочни и краткосрочни зависимости и по този начин се обогатяват възможностите за анализ на зависимостите между социално-икономическите явления и процеси в динамичен аспект и се създават нови предпоставки за тяхното прогнозиране, управление и контрол.

Тъй като между нестационарните променливи може да съществува коинтеграция, но това не е задължително, процедурата за проверка за наличие на коинтеграция е съществена част от процеса на построяване на модела. **Тестовете за коинтеграция** могат да се разграничат според размерността си на две групи:

Първата обхваща проверка на остатъчните елементи от коинтеграционната зависимост между две променливи в един модел, респективно проверява се един коинтеграционен вектор. В тази група се отнасят традиционните тестове на Енгъл и Грейнджър и техните модификации,

тестовите на Дики и Фулър, приложени към остатъчните елементи от коинтеграционната регресия и тестовите на Филипс и Улиарис (Phillips & Ouliaris, 1990).

Втората група обхваща проверката за наличие на повече от един коинтеграционен вектор в система от уравнения. Тук се включват тестовете, основани на матричното представяне на коинтеграционните зависимости на Йохансен, както и редица тестове, основани на максималното правдоподобие.

В научната литература няма еднозначен отговор на въпроса за избора на тест. Всички тестове имат своите предимства и ограничения. От гледна точка на емпиричните изследвания изборът често е продиктуван от природата на изследваните явления и процеси. Ако научният интерес е насочен към определена зависимост между известни променливи, която е издигната като хипотеза, тогава се препоръчва тест въз основа на остатъчните елементи от модел с едно уравнение. Когато се анализират група от променливи, без да е налице предварителна информация за вида и броя на коинтеграционните вектори, се препоръчва да се използват тестове от втората група, в съчетание със системния подход.

Най-ранният тест за коинтеграция е предложен от Енгъл и Грейнджър и се състои от процедура, преминаваща последователно пред следните етапи:

Първи етап. Извършва се предварителен тест за порядъка на интегрираност на отделните променливи. Използват се тестовете за единичен корен на Дики-Фулър, Филипс-Перон, тестът *KPSS*, точковите и спектралните тестове за единичен корен. Ако се установи, че променливите са интегрирани от различен порядък, може да се направи обоснованото заключение, че те не са коинтегрирани. Ако са интегрирани от един и същи порядък, може да се премине към анализ на коинтеграцията, а при повече променливи – и към анализ на мултикоинтеграция.

Втори етап. Оценка на дългосрочната коинтеграционна зависимост под формата на линеен регресионен модел чрез метода на най-малките квадрати. Ако променливите са коинтегрирани, то получените оценки са суперсъстоятелни, т.е. стандартните грешки на тези оценки намаляват пропорционално при увеличаването на дължината на редовете, т.е. по-бързо отколкото при стационарни променливи, при които стандартните грешки намаляват пропорционално на корен квадратен от дължината на редовете. Този ефект се дължи на доминиращото влияние на общия тренд спрямо стационарния компонент, тъй като ковариацията на двете променливи е положителна, при условие че двете променливи нарастват и намаляват заедно.

Трети етап. Получаване на остатъчните елементи от модела и прилагане на тест за единичен корен върху тях. За да се определи дали променливите са коинтегрирани, се изследват остатъчните елементи около дъл-

госрочната регресионна линия. Те са оценка за отклоненията от дългосрочната равновесна зависимост. Ако отклоненията са стационарни, то променливите са коинтегрирани. Проверката се извършва с подобрения тест на Дики-Фулър. Тъй като са остатъчни елементи от регресия и по конструкция имат със средна стойност равна на нула, тестът се прилага във форма без свободен член. Нулевата хипотеза е за наличие на нестационарност. Когато тя не може да се отхвърли, можем да заключим, че остатъчните елементи съдържат единичен корен, т.е. променливите не са коинтегрирани. Отхвърлянето на нулевата хипотеза при определен риск от грешка означава, че остатъчните елементи са стационарни. Може да се заключи, че променливите са коинтегрирани, при условие че изходните променливи са интегрирани от първи порядък. При проверката не могат да се използват критичните знамения, табулирани от Дики и Фулър. Проблемът се състои в това, че редът от остатъчните елементи е получен в резултат от решаването на регресионно уравнение. Действителните стойности не са известни, разполагаме с оценки. Методологията избира такива оценки на параметрите, че сумата от квадрата на остатъчните елементи да е минимална. Тъй като остатъчната вариация е направена възможно минимална, процедурата предполага да се получава стационарен процес. Тестовата статистика трябва да отчита това. Само ако параметрите са известни предварително и са използвани за получаването на остатъчните елементи, стандартните таблици на Дики и Фулър имат приложение. Когато се оценява коинтеграционен вектор, се използват други критични стойности, които зависят от големината на извадката и броя на включените в анализа променливи.

Четвърти етап. Преходът към четвъртия етап на процедурата на Енгъл и Грейнджър се осъществява само в случай, че при третия етап е открита коинтеграционна зависимост. В този случай линейното регресионно уравнение характеризира дългосрочната равновесна зависимост между показателите. Анализират се и се интерпретират получените оценки на параметрите. Оценка на остатъчните елементи около регресионната линия характеризират отклоненията от равновесието между променливите. За да се анализират тези отклонения, които са стационарни, се построява допълнителен модел, наречен модел с корекция на грешката. Той характеризира краткосрочната зависимост между показателите, в т.ч. и постепенното или бързото възстановяване на равновесното положение между тях при отклонение от него по една или друга причина.

В обобщение може да се каже, че идеята на теста се основава на обстоятелството, че коинтеграционните зависимости могат да бъдат оценени състоятелно (поне теоретично) поради суперсъстоятелността на оценките на параметрите. Тази процедура е лесна за приложение, но в същото време се характеризира с определени ограничения:

- Оценка, получени по метода на най-малките квадрати, са суперсъстоятелни независимо дали в модела са включени лагове. Тъй

като оценките при малки извадки (къси динамични редове под 100 наблюдения) имат съществено изместване, е установено, че включването на лагове е важно за оценката на дългосрочните коефициенти.

- Оценката на дългосрочното равновесие изисква нормализация, т.е. една променлива да се избере за зависима, а другите за независими. Например при две променливи всяка от тях може да се избере за нормализация, поради което са възможни две регресионни уравнения, описващи дългосрочната зависимост. От тях се получават два реда с остатъчни елементи, всеки от които може да се използва за проверката. Асимптотично тестовете за единичен корен и в двата случая би трябвало да дават съгласувани резултати. На практика обаче, особено при къси редове, е възможно тестът на остатъците от едното уравнение да потвърди предположението за наличие на коинтеграция, а от другото – да го отхвърли. Подобно противоречие е нежелано свойство на процедурата, тъй като коинтеграцията би следвало да е инвариантна по отношение на нормализацията. Проблемът в това отношение се задълбочава при анализ на повече от две променливи.
- Въведено е имплицитно ограничение за съществуване на един общ фактор между променливите.
- Невъзможно да се идентифицира повече от един коинтеграционен вектор между повече от две променливи, за които по принцип могат да съществуват повече коинтеграционни зависимости.
- Има необходимостта от непараметрична корекция или преработване (*augmentation*) на модела, за да се направят статистически изводи и заключения за коинтеграционната зависимост на базата на χ^2 -квадрат анализ.
- Друг недостатък е, че процедурата се базира на условни оценки на остатъчните елементи. При получаване на оценката на остатъчните елементи се използват оценките на регресионните параметри, които на свой ред съдържат грешки. Поради тази причина оценките на остатъчните елементи са състоятелни само при условие, че регресионните коефициенти са известни или предварително дефинирани. Използването на оценки за получаване на оценки води до натрупване и увеличаване на грешките, което понижава мощността на тестовата процедура.

Процедурата на Йохансен (Johansen, 1988) се основава на представяне на коинтеграционните зависимости с многомерен модел, сходен с векторната авторегресия, който се нарича *векторна регресия с коинтеграция* или *коинтегрирана векторна авторегресия*. Оценките на параметрите се извеждат по метода на максималното правдоподобие. Методът получава широко разпространение в научните изследвания и реализация в

редица софтуерни продукти за анализ на динамични редове, тъй като позволява да се проверяват хипотези за множество от коинтеграционни вектори; дава възможности да се тестват ограничени версии на коинтеграционните вектори и скоростта на приспособяване; да се потвърдят или отхвърлят изводите на икономическата теория чрез емпирична проверка за конкретни стойности на съответните регресионни коефициенти.

Процедурата на Йохансен се основава на връзката между ранга на матрицата и характеристичните ѝ корени, като по този начин е своеобразно обобщение на теста за единичен корен на Дики и Фулър, но в матрична форма. В единичния случай се проверява дали един ред е стационарен, на основата на оценката на параметъра π , измерващ силата на връзката на първите разлики с предходния лаг в уравнението:

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

По аналогия с този единичен случай се съставя матричното уравнение:

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i x_{t-i} + \varepsilon_t,$$

където: $\pi = -\left(I - \sum_{i=1}^p A_i \right)$;

$$\pi_i = -\sum_{j=i+1}^p A_j.$$

Проверката за наличие на коинтеграционни вектори (и съответните зависимости) се основава на ранга на матрицата π . Рангът на π е равен на броя на коинтеграционните вектори. Ако рангът на матрицата π е нула, между редовете не съществуват коинтеграционни зависимости. Анализът може да продължи, но зависимости трябва да се търсят в стационарните части, например като се построи модел на векторна авторегресия на първите последователни разлики. Ако рангът е пълен, векторният процес е стационарен. Ако рангът е единица, има само един коинтеграционен вектор и πx_{t-1} е описание на процеса на корекция на грешката. В останалите случаи процедурата открива повече коинтеграционни вектора.

На практика оценката на ранга на матрицата π става на базата на характеристичните ѝ корени, които са различни от нула. След получаване на оценката на матрицата π , корените ѝ се подреждат последователно $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ в низходящ порядък. Ако променливите не са коинтегрирани, рангът е нула и всички характеристични корени са нули. Тъй като те са оценки и имат поведение на случайни величини, трябва да се проверява тяхната статистическа значимост (дали е статистически значима разликата им от нулата). Това става със следните тестови характеристики:

$$\lambda_{trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \text{ и } \lambda_{max}(r, r+1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1}),$$

където: $\hat{\lambda}_i$ са оценените стойности на характеристичните корени (собствените стойности), получени от оценената матрица π ;

T е броят на използваните наблюдения (дължината на редовете).

Чрез първата тестова характеристика се проверява нулевата хипотеза, че броят на различните коинтеграционни вектори е по-малък или равен на r срещу обща алтернатива. Тази характеристика е нула, когато всички параметри λ_i са нула. Втората характеристика проверява нулевата хипотеза, че броят на коинтеграционните вектори е равен на r срещу алтернативната хипотеза броят на коинтеграционните вектори да е равен на $r + 1$. Критичните значения за тестовите характеристики са табулирани по метода „Монте Карло“. Разпределението им зависи от следните две неща: от броя на нестационарните компоненти ($n - r$) и от начина на специфициране на детерминистичната част на моделите (без свободен член, само свободен член, свободен и линеен тренд).

Изводите от процедурата на Йохансен могат да се използват и за частния случай на два динамични реда, за да се определи дали те са коинтегрирани. Матрицата π е с размерност 2×2 и притежава два характеристични корена, които са λ_1 и λ_2 . Възможни са следните ситуации:

Първо, ако двата характеристични корена λ_1 и λ_2 лежат вътре в единичната окръжност. Тогава матрицата π има пълен ранг (ранг 2) и променливите са съвместно стационарни. Между тях не съществува коинтеграция.

Второ, ако някой от корените λ_1 и λ_2 лежи извън единичната окръжност, процесите са експлозивни. Някоя променлива не е интегрирана, следователно двете не могат да са коинтегрирани.

Трето, ако $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, и двете променливи се развиват без дългосрочна зависимост, между тях не може да има коинтеграция. Тъй като матрицата π има ранг нула, променливите са интегрирани, но не са коинтегрирани.

Четвърто, единият от корените λ_1 и λ_2 е равен на единица, а другият е по-малък от единица по абсолютна стойност. Детерминантата на матрицата π е нула, а рангът на матрицата е единица. Така всяка променлива ще има същия стохастичен тренд и първите разлики на всяка ще бъдат стационарни. Налице е коинтеграция между двата динамични реда, която се описва от един коинтеграционен вектор.

Въпреки многообразието от коинтеграционни подходи, редица въпроси продължават да са обект на внимание от изследователите:

- Трябва ли да се моделират експлицитно краткосрочните зависимости.

- Дали коинтеграционните процеси трябва да бъдат изследвани в затворени многомерни системи, частични системи или само с едно уравнение от типа модел с корекция на грешката. Въпреки превъзходството на системите, условните модели имат същите свойства, когато условията за екзогенност са изпълнени. В този случай от практико-приложна гледна точка системите с по-малък размер са за предпочитане. Стандартните разпределения важат за оценките на коинтеграционния вектор.
- Да се предложи коя теория за асимптотичното разпределение дава най-добро приближение при крайна извадка.
- Да се анализира погрешното включване или изпускане на интегрирани променливи, което може значително да промени свойствата на модела в някои случаи и да не се отрази изобщо в други.
- Да се оцени влиянието на интегрираните променливи и коинтеграцията при приложението на някои други процедури като например за корекция на автокорелацията.
- Проблемите при използването на моментни и периодни редове и размерността им освен ако не са интегрирани от еднакъв порядък.
- Главният проблем при опитите да се анализират зависимости, в които участват променливи, интегрирани от по-висок от нулев порядък, е, че статистическите свойства на първи втори момент не са валидни. Т.е. извадковите моменти не съвпадат с тези на генералната съвкупност. Необходима е друга теория за разпределението, когато редовете не са стационарни и ергодични.

2.2. Моделиране на краткосрочни зависимости

Моделът с корекция на грешката е въведен за първи път от Сарган (Sargan, 1964) и популяризиран от Дейвидсън (Davidson & Hendry, 1978). Той се третира като алтернатива на моделите на векторна авторегресия. Има различни интерпретации на модела с корекция на грешката. Основните характеристики на модела с корекция на грешката в сравнение с векторната авторегресия са дългосрочното равновесие и включването на отклонението от равновесието като обясняваща променлива.

В основата на връзката между модел с корекция на грешката и коинтеграцията е теоремата на Грейнджър. Ограниченията, които се налагат, за да се постигне коинтеграция между променливите, гарантират съществуването на модел с корекция на грешката. Променливите са интегрирани променливи, които се намират в устойчиво равновесие помежду си, представено чрез нормализирания коинтеграционен вектор. Тяхната линейна комбинация е стационарна, поради което при всяко отклонение от равновесието в краткосрочен аспект, трябва да се задействат механизми, които да възстановят равновесието. Поради това в обикновената си форма

моделът с корекция на грешката съдържа два основни елемента: **първо**, настройка спрямо неравновесно предходно състояние, чрез която равновесието се постига плавно; **второ**, настройка към моментните изменения на променливите, която определя равновесието.

Модел с корекция на грешката има следния вид при две променливи x_t и y_t :

нормализиран по отношение на x_t :

$$A(L)\Delta y_t = \alpha + B(L)\Delta x_t + \lambda_{y/x}(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}) + u_t;$$

нормализиран по отношение на y_t :

$$C(L)\Delta x_t = \delta + D(L)\Delta y_t + \lambda_{x/y}(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}) + e_t,$$

където: $A(L)$, $B(L)$, $C(L)$, и $D(L)$ са полиноми на лаговия оператор;

α и δ – константи на моделите;

$\lambda_{y/x}$ и $\lambda_{x/y}$ – регресионни коефициенти, характеризиращи скоростта, с която се възстановява равновесното състояние на системата;

β_0 и β_1 – коефициентите, формиращи коинтеграционния вектор;

u_t и e_t – остатъчните елементи, които трябва да имат поведение на независими и нормално разпределени случайни величини.

Интерпретацията на модел, който съдържа информация както за дългосрочната, така и за краткосрочната зависимост между две явления, е такава, че промяна в първото явление настъпва или в резултат от нарушение на равновесието в предходния период, или поради изменение на другото явление в текущия период. Коефициентът пред коригиращия компонент се очаква да е отрицателен и в интервала $-1 \leq \lambda \leq 0$, тъй като, ако в предходния период първото явление е надвишавало равновесното си равнище, то в текущия трябва да се намали, за да се възстанови равновесието. Обратно, ако в предходния период е имало недостиг в първото явление, в текущия то трябва да се увеличи. При условие че коефициентът λ е равен на -1 , то равновесието е напълно възстановено през текущия период. В противен случай само част от отклонението от равновесното състояние е премахната.

По принцип в система, която е коинтегрирана, двете променливи реагират на отклонението от равновесието. Възможно е обаче един, но не и двата параметъра $\lambda_{y/x}$ и $\lambda_{x/y}$ да са нула. Тогава едната променлива е слабо екзогенна, защото не участва в корекцията на грешката. Така може да се изследва иконометричен модел само за другата променлива.

Прави впечатление, че моделът с корекция на грешката наподобява комбинация на векторна авторегресия в първи разлики и компонент на корекция на грешката. Параметрите пред тях се интерпретират като скорост на приспособяване. Колкото по-голям е параметърът λ по абсолютна стойност, толкова по-бързо се възстановява равновесието. Обратно, колкото е по-близо до нулата, толкова по-бавно се възстановява равновесието. Ако е приблизително равен на нула, зависимата променлива не реагира на

отклонението от равновесието през последния период. В този случай не е налице стабилно равновесие и променливите не са коинтегрирани.

Заклучение

Анализът на динамични зависимости е своеобразно развитие на класическия анализ на зависимости в частния случай, когато данните представляват динамични редове. Това има двойко влияние, тъй като, от една страна, създава проблеми пред класическите методи за анализ, но от друга – предоставя повече възможности за задълбочаване на анализа по отношение на редица специфични характеристики на зависимостите.

Поради разположението на данните във времето, става възможно да се изучава не само влиянието на фактора върху резултата, но и времевата синхронизация – **първо**, кога се проявява влияние – веднага или след изтичане на определен период време; и **второ** – как се проявява влиянието – пълно или частично – разпределено във времето. Само в този аспект на анализа може да се направи разграничението между дългосрочен ефект от влиянието на фактора и краткосрочните ефекти, които настъпват в определен период. Именно това извършват моделите на *трансферните функции*, известни в практиката и като *модел на разпределени лагове*.

При анализа на зависимостите в динамика важно значение оказва наличието на компонента на тенденция в редовете. При класическия анализ наличието на тенденция е проблем, който не позволява да се прилагат статистическите методи на регресионния анализ. Необходимо е да се извърши предварителна преработка на редовете, като тенденцията се премахне чрез някаква процедура на филтриране – най-често чрез последователни разлики. Премахването на компонент води до загуба на част от информацията, която се съдържа в редовете по отношение на зависимостта между тях. На практика така може да се установят и изследват само краткосрочни зависимости. Този проблем получава своето разрешаване с разработването на концепцията на *коинтеграцията*, която описва закономерностите при взаимната зависимост между нестационарни променливи – каквито са повечето икономически динамични редове. Трябва да се действа много внимателно, тъй като границата между коинтеграцията и „фалшивата регресия“ е тясна и може да се премине лесно при използване на неадекватни или неточни методи за диагностична проверка. Когато тестовете са приложени коректно и коинтеграцията е установена, тя показва дългосрочното динамично равновесие между изследваните показатели. Коинтеграцията е директно свързана с *моделите с корекция на грешката*. Те показват как се възстановява дългосрочното равновесие, като по една или друга причина то се наруши в краткосрочен аспект. Едновременното използване на

тези модели дава възможност да се задълбочава анализът на икономическата динамика както в краткосрочен, така и в дългосрочен аспект и да се подобрят качествата на прогнозите.

Използвани източници

- Allais, M. (1966). Restatement of the Quantity Theory of Money. *American Economic Review*, 56: 1123-1157.
- Almon, S. (1965). The distributed lag between capital appropriations and expenditures. *Econometrica*, 33: 178-196.
- Alt, F. L. (1942). Distributed Lags. *Econometrica*, 2: 113-128.
- Astrom, K.-J., & Bohlin, T. (1966). Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records. От P. H. Hammond, *Theory of Self-Adaptive Control Systems*. New York: Plenum Press.
- Barro, R. J. (1970). Inflation, the Payments Period, and the Demand for Money. *Journal of Political Economy*, 78: 1228-1263.
- Baumeister, C., & Kilian, L. (2012). Real-Time Analysis of Oil Price Risks Using Forecast Scenarios. *Staff Working Papers, Banc of Canada*.
- Beguín, J.-M. G., & Monfort, A. (1980). Identification of a mixed autoregressive-moving average process: the corner method. От O. D. Anderson, *Time Series* (стр. 423-435). Amsterdam: North-Holland.
- Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New York: John Wiley & Sons.
- Brown, T. M. (1952). Habit persistence and lags in consumer behaviour. *Econometrica*, 20: 355-371.
- Cagan, P. (1956). The Monetary Dynamics of Hyperinflation. От M. Friedman, *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press.
- Cooley, T., & LeRoy, S. (1985). Atheoretical macroeconometrics: A critique. *Journal of Monetary Economics*, 3: 283-308.
- Davidson, J., & Hendry, D. (1978). Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship between Consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom. *Economic Journal*, 661-692.
- de Leeuw, F. (1962). The demand for capital goods by manufacturers: a study of quarterly time series. *Econometrica*, 30: 407-423.
- Diamond, J. J. (1962). Further Development of a distributed lag investment function. *Econometrica*, 30: 788-800.
- Edelstein, P., & Kilian, L. (2009). How sensitive are consumer expenditures to retail energy prices? *Journal of Monetary Economics*, 6: 766-779.
- Eisner, R. (1960). A Distributed Lag Investment Function. *Econometrica*, 1-29.
- Eisner, R. (1963). Investment: Fact and Fancy. *American Economic Review*, 237-246.

- Eisner, R. (1967). The Permanent Income Theory for Investment: Some empirical explorations. *American Economic Review*, 363-390.
- Engle, R., & Granger, C. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55: 251-276.
- Fisher, I. (1926). A Statistical Relation between Unemployment and Price Changes. *International Labour Review*, 13(6): 785-792.
- Fisher, I. (1936). 100% Money and the Public Debt. *Economic Forum*, 406-420.
- Fisher, I. (1937). Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 29: 323-328.
- Friedman, M. (1957). *A Theory of the Consumption Function*. Princeton: Princeton University Press.
- Granger, C. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 23: 121-130.
- Granger, C., & Weiss, A. (1983). Time series analysis of error-correction models. Or *Studies in econometrics, time series, and multivariate statistics*. Academic Press.
- Greenberg, E. (1964). A stock adjustment investment model. *Econometrica*, 32: 339-357.
- Griliches, Z., & Wallace, N. (1965). The determinants of investment revisited. *International Economic Review*, 6: 311-329.
- Griliches, Z., Maddala, G. S., Lucas, R., & Wallace, N. (1962). Notes on Estimated Aggregate Quarterly Consumption Functions. *Econometrica*, 3: 491-500.
- Hatanaka, M. (1996). *Time-Series Based Econometrics*. Oxford: Oxford University Press.
- Heien, D. M. (1969). Conceptual and practical issues in the measurement of cost-of-living. *Proceeding of the Business and Economic Statistics Section of the American Statistical Association*. Washington DC.
- Houthakker, H. S., & Taylor, L. D. (1966). *D. Taylor, Consumer Demand in the United States, 1929-1970, Analyses and Projections*. Cambridge: Harvard University Press.
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 231-254.
- Jorgenson, D. (1963). Capital Theory and Investment Behavior. *American Economic Review*, 2: 247-259.
- Jorgenson, D. (1966). Rational Distributed Lag Functions. *Econometrica*, 1: 135-149.
- Jorgenson, D., & Hall, R. (1969). Tax Policy and Investment Behavior: Replay and Further Results. *American Economic Review*, 3: 388-401.
- Jorgenson, D., & Siebert, C. (1968). A Comparison of Alternative Theories of Corporate Investment Behavior. *American Economic Review*, 4: 681-712.

- Jorgenson, D., & Siebert, C. (1968). Optimal Capital Accumulation and Corporate Investment Behavior. *Journal of Political Economy*, 6: 1123-1151.
- Jorgenson, D., & Stephenson, J. (1967). Investment Behavior in United States Manufacturing, 1947-1960. *Econometrica*, 2: 169-220.
- Jorgenson, D., & Stephenson, J. (1967). The Time Structure of Investment Behavior in United States Manufacturing, 1947-1960. *The Review of Economics and Statistics*, 49: 16-27.
- Jorgenson, D., & Stephenson, J. (1969). Issues in the Development of the Neoclassical Theory of Investment Behavior. *The Review of Economics and Statistics*, 3: 346-353.
- Kilian, L., & Murphy, D. P. (2011). *The Role of Inventories and Speculative Trading in the Global Market for Crude Oil*. University of Michigan.
- Klein, L. R., & Goldberger, A. S. (1955). *An Econometric Model for the United States, 1929-1952*. Amsterdam: North-Holland.
- Koyck, L. M. (1954). *Distributed Lags and Investment Analysis*. Amsterdam: North-Holland.
- Liu, L. M., & Hanssen, D. M. (1982). Identification of multiple input transfer function models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 3: 297-314.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. New York: Springer.
- Lütkepohl, H. (2011). *Vector autoregressive models*. International Encyclopedia of Statistical Science - Springer.
- Nelson, C. R., & Plosser, C. I. (1982). Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications. *Journal of Monetary Economics*, 10:139-162.
- Nerlove, M. (1956). Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities. *Journal of Farm Economics*, 38: 496-509.
- Nerlove, M. (1958). *The Dynamics of Supply: Estimation of Farmers' Response to Price*. Baltimore: Johns Hopkins Press.
- Nerlove, M. (1972). Lags in Economic Behavior. *Econometrica*, 2: 221-251.
- Nerlove, M., & Waugh, F. V. (1961). Advertising without Supply Control: Some Implications of a Study of the Advertising of Oranges. *Journal of Farm Economics*, 43: 471-488.
- Phillips, P., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration. *Econometrica*, 1: 165-193.
- Sargan, J. (1964). Wages and prices in the United Kingdom. От P. Hart, P. Mills, & J. Whitaker, *Econometric Analysis for National Economic Planning*. London: Butterworths.
- Sims, C. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 1: 1-48.
- Tinbergen, J. (1939). *Business Cycles in the United States, 1919-1932*. Geneva: League of Nations, Economic Intelligence Service.

- Tinbergen, J. (1949). Long term foreign trade elasticities. *Macroeconomica*, 1: 174-185.
- Tsay, R. S. (1985). Model Identification in Dynamic Regression (Distributed Lag) Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 3: 228-237.
- Waggoner, D., & Zha, T. (1999). Conditional Forecasts In Dynamic Multivariate Models. *The Review of Economics and Statistics*, 4: 639-651.
- Watson, M. (1994). Vector autoregressions and cointegration. От R. F. Engle, & D. L. McFadden, *Handbook of Econometrics v4* (стр. 2843-2915). Elsevier Science.
- Yule, G. U. (1927). On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 267-298.
- Zellner, A. (1957). *An Empirical and Theoretical Analysis of Short-run Consumption Functions*. Berkeley: University of California.
- Zellner, A., Huang, D. S., & Chau, L. C. (1965). Further Analysis of the Short-Run Consumption Function with Emphasis on the Role of Liquid Assets. *Econometrica*, 3: 571-581.